Sammlung Schubert LX

Einführung in die Theorie der partiellen Differentialgleichungen

Von

Dr. J. Horn
Professor an der Technischen Hochschule
zu Darmstadt

Leipzig
G. J. Göschen'sche Verlagshandlung
1910

517.38
A81 e

Alle Rechte von der Verlagshandlung vorbehalten

Druck der Spamerschen Buchdruckerei in Leipzig

Vorwort.

An die beiden Bände der Sammlung Schubert, welche von den gewöhnlichen Differentialgleichungen handeln (Bd. XIII von Schlesinger, Bd. L vom Verfasser), schließt sich der vorliegende Band an, welcher zur Einführung in verschiedene Zweige der Theorie der partiellen Differentialgleichungen dienen soll. Er will mehr bieten als die Lehrbücher der Differential- und Integralrechnung, aber nicht so viel wie die auf einzelne Teile der Theorie der partiellen Differentialgleichungen bezüglichen Spezialwerke, soweit solche vorhanden sind. Um auf mäßigem Raume verschiedene Untersuchungsrichtungen darstellen zu können, habe ich mich auf partielle Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen (abgesehen vom ersten Abschnitt) beschränkt. Wegen der Bedeutung, welche in der neuesten Zeit die Theorie der Integralgleichungen für einzelne Zweige der Theorie der Differentialgleichungen gewonnen hat, ist ein Abschnitt über die Fredholmsche Integralgleichung eingefügt worden, woran sich Anwendungen auf gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen anschließen.

Aus dem Inhaltsverzeichnis ersieht man, wie die Auswahl aus dem reichen Stoff ohne Rücksicht auf Vollständigkeit getroffen wurde. Im Hinblick auf die in der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften enthaltenen Literaturangaben wurde nur hier und da auf benutzte neuere Quellen sowie auf Untersuchungen hingewiesen, welche sich an die behandelten Gegenstände anschließen.

Außer der Differential- und Integralrechnung werden die Elemente der Funktionentheorie und der Determinantentheorie sowie einige (etwa aus Bd. L zu entnehmende) Kenntnisse aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen vorausgesetzt.

Darmstadt, im Dezember 1909.

J. Horn.

CARNEGIE INSTITUTE OF TECHNOLOGY LIBRARY

Inhaltsverzeichnis.

I. Abschnitt.

Lineare partielle Differentialgleichungen erster Ordnung mit n unabhängigen Veränderlichen.

II. Abschnitt.

Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen.

III. Abschnitt.

Partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen.

IV. Abschnitt.

Lineare partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung, insbesondere hyperbolische Differentialgleichungen.

V. Abschnitt.

Die Fredholmsche Integralgleichung. Reihenentwicklungen nach den Eigenfunktionen eines symmetrischen Kerns.

VI. Abschnitt.

Randwertaufgaben bei gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

VII. Abschnitt.

Randwertaufgaben bei elliptischen Differentialgleichungen.

VIII. Abschnitt.

Partielle Differentialgleichungen der Physik.

I. Abschnitt.

Lineare partielle Differentialgleichungen erster Ordnung mit n unabhängigen Veränderlichen.

§ 1. Beweis der Existenz der Integrale einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung.

Eine Gleichung von der Form

$$F(x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n) = 0, \tag{A}$$

worin z als Funktion der n unabhängigen Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n$ aufgefaßt wird und die Bezeichnung

$$p_1 = \frac{\partial z}{\partial x_1}, \quad \ldots, \quad p_n = \frac{\partial z}{\partial x_n}$$

benutzt ist, wird eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung genannt. Unter einem Integral oder einer Lösung der Differentialgleichung (A) versteht man eine Funktion z von $x_1, \ldots, x_n$, welche der Differentialgleichung identisch (d. h. für beliebige Werte von $x_1, \ldots, x_n$) genügt.

Bis auf weiteres*) lassen wir nicht nur reelle, sondern auch komplexe Werte der Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n, z$ zu und setzen sowohl die gegebenen als auch die gesuchten Funktionen als analytisch voraus.

*) In den Abschnitten I—III. — Literaturangaben zu den drei ersten Abschnitten finden sich in der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. II A, 5 (E. v. Weber).

Wir verstehen unter

$$F(x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n)$$

eine analytische Funktion der $2n+1$ Argumente

$$x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n,$$

welche sich in der Umgebung der Stelle

$$x_1 = x_1^0, \quad \ldots, \quad x_n = x_n^0, \quad z = z^0, \quad p_1 = p_1^0, \quad \ldots, \quad p_n = p_n^0$$

regulär verhält, an dieser Stelle verschwindet und eine von Null verschiedene Ableitung

$$\frac{\partial F}{\partial p_1}$$

besitzt. Dann läßt sich die Differentialgleichung (A) auf die Form

$$(1) \qquad p_1 = f(x_1, \ldots, x_n, z, p_2, \ldots, p_n)$$

bringen, wo f eine analytische Funktion der beigefügten $2n$ Argumente ist, welche sich in der Umgebung der Stelle

$$x_1 = x_1^0, \quad \ldots, \quad x_n = x_n^0, \quad z = z^0, \quad p_2 = p_2^0, \quad \ldots, \quad p_n = p_n^0$$

regulär verhält und an dieser Stelle den Wert $p_1 = p_1^0$ annimmt. Es sei eine analytische Funktion $\varphi(x_2, \ldots, x_n)$ der $n-1$ Veränderlichen $x_2, \ldots, x_n$ gegeben, welche in der Umgebung der Stelle $x_2 = x_2^0, \ldots, x_n = x_n^0$ regulär ist, und zwar sei für $x_2 = x_2^0, \ldots, x_n = x_n^0$

$$\varphi = z^0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = p_2^0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} = p_n^0.$$

Wir suchen die Differentialgleichung (1) durch eine analytische Funktion z der n unabhängigen Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n$ zu befriedigen, welche sich in der Umgebung der Stelle $x_1 = x_1^0, \ldots, x_n = x_n^0$ regulär verhält und sich für $x_1 = x_1^0$ auf die gegebene Funktion $\varphi(x_2, \ldots, x_n)$ reduziert.

Wir nehmen, was keine Beschränkung der Allgemeinheit darstellt, $x_1^0 = 0, \ldots, x_n^0 = 0$ an und führen die Gleichung (1) durch die Substitution

$$z = z' + \varphi(x_2, \ldots, x_n) + A x_1,$$

$$A = f\left(0, \ldots, 0, [\varphi]_0, \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right]_0, \ldots, \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x_n}\right]_0\right) \text{ *)}$$

über in die Gleichung

$$\frac{\partial z'}{\partial x_1} = f\left(x_1, \ldots, x_n, A x_1 + \varphi + z', \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \frac{\partial z'}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} + \frac{\partial z'}{\partial x_n}\right)$$
$$- f\left(0, \ldots, 0, [\varphi]_0, \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right]_0, \ldots, \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x_n}\right]_0\right),$$

deren rechte Seite an der Stelle

$$x_1 = 0, \quad \ldots, \quad x_n = 0, \quad z' = 0, \quad \frac{\partial z'}{\partial x_2} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial z'}{\partial x_n} = 0$$

verschwindet und in der Umgebung dieser Stelle regulär ist; es handelt sich um eine Lösung z' dieser Gleichung, welche sich in der Umgebung der Stelle $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$ regulär verhält und für $x_1 = 0$ (identisch in $x_2, \ldots, x_n$) verschwindet. Indem wir statt z' wieder z schreiben, haben wir eine Differentialgleichung von der Form

$$(2) \qquad p_1 = f(x_1, \ldots, x_n, z, p_2, \ldots, p_n),$$

wo f in eine Potenzreihe der beigefügten $2n$ Argumente entwickelbar ist, welche für

$$x_1 = 0, \quad \ldots, \quad x_n = 0, \quad z = 0, \quad p_2 = 0, \quad \ldots, \quad p_n = 0$$

verschwindet; wir suchen eine der Differentialgleichung (2) genügende Funktion z von $x_1, \ldots, x_n$, welche in der Umgebung der Stelle $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$ regulär ist und für $x_1 = 0$ (identisch in $x_2, \ldots, x_n$) verschwindet.

Für diese Funktion ist**)

$$\left(\frac{\partial^{\alpha_2 + \cdots + \alpha_n} z}{\partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}\right)_0 = 0,$$

---

*) Unter $[\psi]_0$ ist der Wert verstanden, welchen die Funktion ψ von $x_2, \ldots, x_n$ für $x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$ annimmt.

**) Der Wert, welchen eine Funktion ψ von $x_1, \ldots, x_n$ für $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$ annimmt, wird mit $(\psi)_0$ bezeichnet.

wo $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ irgendwelche positive ganze Zahlen einschließlich Null sind. Aus der Gleichung (2) folgt

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right)_0 = 0 .$$

Indem man die Gleichung (2) α_2-mal partiell nach x_2, … α_n-mal partiell nach x_n differentiiert und sodann $x_1 = \ldots = x_n = 0$ setzt, erhält man

$$\left(\frac{\partial^{1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n} z}{\partial x_1 \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}\right)_0 .$$

Indem man die partiell nach x_1 differentiierte Gleichung (2) ebenso behandelt wie die Gleichung (2) selbst, ergibt sich

$$\left(\frac{\partial^{2+\alpha_2+\cdots+\alpha_n} z}{\partial x_1^2 \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}\right)_0 .$$

Fährt man so fort, so erhält man sämtliche Differentialquotienten

$$\left(\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n} z}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}\right)_0$$

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n = 0, 1, 2, \ldots)$$

aus den Koeffizienten der Potenzreihe

$$f(x_1, \ldots, x_n, z, p_2, \ldots, p_n)$$

durch die Operationen der Addition und Multiplikation.

Wir müssen nachweisen, daß die Reihe

$$(3) \qquad z = \sum \frac{1}{\alpha_1! \ldots \alpha_n!}\left(\frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n} z}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}\right)_0 x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n},$$

welche wir mit S bezeichnen, konvergent ist, solange die absoluten Beträge von $x_1, \ldots, x_n$ hinreichend klein sind.

Da die Koeffizienten der Potenzreihe S eindeutig bestimmt sind, so kann nicht mehr als ein reguläres Integral z von (2) vorhanden sein, welches für $x_1 = 0$ verschwindet.

§ 2. Existenzbeweis; Fortsetzung.

Wir nehmen an, die Potenzreihe für die Funktion $f(x_1, \ldots, x_n, z, p_2, \ldots, p_n)$ sei für

$$|x_1| \leq \varrho, \quad \ldots, \quad |x_n| \leq \varrho, \quad |z| \leq \varrho, \quad |p_2| \leq R, \quad \ldots, \quad |p_n| \leq R$$

konvergent und der absolute Betrag von f in dem angegebenen Gebiet sei höchstens gleich M. Die Funktion

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} &\Phi(x_1, \ldots, x_n, z, p_2, \ldots, p_n) \\ &= \frac{M}{\left(1 - \frac{x_1}{\varrho}\right) \cdots \left(1 - \frac{x_n}{\varrho}\right)\left(1 - \frac{z}{\varrho}\right)\left(1 - \frac{p_2}{R}\right) \cdots \left(1 - \frac{p_n}{R}\right)} - M \end{aligned} \right.$$

läßt sich, solange

$$|x_1| < \varrho, \quad \ldots, \quad |x_n| < \varrho, \quad |z| < \varrho, \quad |p_2| < R, \quad \ldots, \quad |p_n| < R$$

ist, in eine Potenzreihe von $x_1, \ldots, x_n, z, p_2, \ldots, p_n$ entwickeln, in welcher das konstante Glied verschwindet, während die übrigen Koeffizienten positiv und nicht kleiner sind als die absoluten Beträge der entsprechenden Koeffizienten in der Reihenentwicklung der Funktion $f(x_1, \ldots, x_n, z, p_2, \ldots, p_n)$ *). Die Funktion Φ kann durch die Funktion

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} &\Psi(x_1, \ldots, x_n, z, p_2, \ldots, p_n) \\ &= \frac{M}{\left(1 - \frac{x_1 + \cdots + x_n + z}{\varrho}\right)\left(1 - \frac{p_2 + \cdots + p_n}{R}\right)} - M \end{aligned} \right.$$

ersetzt werden; denn der Bruch

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{x_1 + \cdots + x_n + z}{\varrho}\right)\left(1 - \frac{p_2 + \cdots + p_n}{R}\right)}$$

läßt sich, wenn die absoluten Beträge von $x_1, \ldots, x_n, z$ kleiner als ϱ und die absoluten Beträge von $p_2, \ldots, p_n$

*) Vgl. etwa „Gewöhnliche Differentialgleichungen" (Sammlung Schubert LI), S. 9.

kleiner als R sind, in eine Potenzreihe von $x_1, \ldots, x_n$, $z, p_2, \ldots, p_n$ entwickeln, deren Koeffizienten positiv und nicht kleiner sind als die entsprechenden Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung des Bruches

$$\frac{1}{\left(1-\frac{x_1}{\varrho}\right)\ldots\left(1-\frac{x_n}{\varrho}\right)\left(1-\frac{z}{\varrho}\right)\left(1-\frac{p_2}{R}\right)\ldots\left(1-\frac{p_n}{R}\right)}.$$

Wir können weiterhin, indem wir $0<\alpha<1$ annehmen, $\Psi(x_1, \ldots, x_n, z, p_2, \ldots, p_n)$ durch die Funktion

$$(6)\quad \begin{cases} V(x_1, \ldots, x_n, z, p_2, \ldots, p_n) \\ = \dfrac{M}{\left(1-\dfrac{\frac{x_1}{\alpha}+x_2+\ldots+x_n+z}{\varrho}\right)\left(1-\dfrac{p_2+\ldots+p_n}{R}\right)} - M \end{cases}$$

ersetzen, deren Koeffizienten positiv und nicht kleiner sind als die entsprechenden Koeffizienten von Ψ.

Für ein Integral z der Gleichung

$$(7)\qquad p_1 = V(x_1, \ldots, x_n, z, p_2, \ldots, p_n),$$

welches in der Umgebung von $x_1=0, \ldots, x_n=0$ regulär ist und für $x_1=0$ verschwindet, erhält man durch das in § 1 beschriebene Verfahren eine Reihe S', deren Koeffizienten positiv und größer sind als die absoluten Beträge der entsprechenden Koeffizienten der aus der Gleichung (2) erhaltenen Reihe S.

Wir zeigen zunächst, daß die Differentialgleichung (7) durch eine (für $x_1=0$ nicht verschwindende) in der Umgebung von $x_1=0, \ldots, x_n=0$ konvergente Potenzreihe S'' mit lauter positiven Koeffizienten befriedigt wird.

Läßt sich die Gleichung (7) durch eine Potenzreihe z von

$$u = x_1 + \alpha(x_2 + \ldots + x_n)$$

befriedigen, so muß

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = \frac{dz}{du}, \qquad \frac{\partial z}{\partial x_2} = \alpha\frac{dz}{du}, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial z}{\partial x_n} = \alpha\frac{dz}{du}$$

sein, also

$$\frac{dz}{du} = \frac{M}{\left(1 - \dfrac{\dfrac{u}{\alpha} + z}{\varrho}\right)\left(1 - \dfrac{(n-1)\alpha}{R}\dfrac{dz}{du}\right)} - M$$

oder

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(1 - \frac{(n-1)M\alpha}{R}\right)\frac{dz}{du} - \frac{(n-1)\alpha}{R}\left(\frac{dz}{du}\right)^2 \\ &\qquad = \frac{M}{1 - \dfrac{\dfrac{u}{\alpha} + z}{\varrho}} - M, \end{aligned}\right.$$

wo die rechte Seite in eine Potenzreihe von u und z mit lauter positiven Koeffizienten entwickelt werden kann; α werde so klein gewählt, daß

$$1 - \frac{(n-1)M\alpha}{R}$$

positiv ausfällt; nimmt man an, daß für $u = 0$

$$z = 0, \qquad \frac{dz}{du} = 0$$

sei, so kann man der letzten Gleichung durch Auflösung nach $\dfrac{dz}{du}$ die Form geben:

$$(9)\qquad \frac{dz}{du} = \varphi(u, z),$$

wo φ eine für $u = 0$, $z = 0$ verschwindende Potenzreihe darstellt. Daß die Koeffizienten dieser Potenzreihe positiv sind, erkennt man, wenn man dieselben nach der Methode der unbestimmten Koeffizienten berechnet. Die gewöhnliche Differentialgleichung (9) wird durch eine in der Umgebung von $u = 0$ reguläre Funktion z von u befriedigt, welche für $u = 0$ verschwindet*); setzt man in (9) $u = 0$,

*) Vgl. etwa „Gewöhnl. Differentialgl.", S. 13 und 14.

$z = 0$, so wird $\left(\frac{dz}{du}\right)_0 = 0$; wenn man nach u differentiiert und $u = 0$ setzt, erhält man für $\left(\frac{d^2z}{du^2}\right)_0$ einen positiven Wert usw.: die fragliche Lösung von (9) läßt also eine Reihenentwicklung

$$(10) \qquad z = \sum \frac{1}{\lambda!}\left(\frac{d^\lambda z}{du^\lambda}\right)_0 u^\lambda$$

mit lauter positiven Koeffizienten zu. Setzt man dann $u = x_1 + \alpha(x_2 + \dots + x_n)$, so hat man eine Potenzreihe S'' mit lauter positiven Koeffizienten, welche der Differentialgleichung (7) genügt. Die Eigenschaft, für $x_1 = 0$ zu verschwinden, kommt der Reihe S'' nicht zu.

Die Koeffizienten der Reihe S'' sind größer als die entsprechenden Koeffizienten der Reihe S', denn die Koeffizienten von $x_2^{\lambda_2} \dots x_n^{\lambda_n}$, ... in S'' sind positiv, während die entsprechenden Koeffizienten in S' gleich Null sind, und die übrigen Koeffizienten leiten sich aus den Koeffizienten von $x_2^{\lambda_2} \dots x_n^{\lambda_n}$ bei S'' und S' in gleicher Weise durch Addition und Multiplikation ab.

Die positiven Koeffizienten der konvergenten Reihe S'' sind also größer als die absoluten Beträge der Koeffizienten der Reihe S; folglich ist auch die Reihe S konvergent, wenn die absoluten Beträge von $x_1, \dots, x_n$ hinreichend klein sind*).

Hiermit ist der folgende Satz bewiesen:

In der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung

$$(A) \qquad F(x_1, \dots, x_n, z, p_1, \dots, p_n) = 0$$

sei F eine analytische Funktion von $x_1, \dots, x_n, z, p_1, \dots, p_n$, welche an der Stelle

$$x_1 = x_1^0, \quad \dots, \quad x_n = x_n^0, \quad z = z^0, \quad p_1 = p_1^0, \quad \dots, \quad p_n = p_n^0$$

*) Der hier gegebene Konvergenzbeweis rührt wie der in § 19 und § 21 für eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung benutzte von Goursat her (Bull. de la Soc. math. de France 1898, Cours d'Analyse, Bd. II, S. 360 ff.)

Einen anderen Beweis für die Existenz der Integrale partieller Differentialgleichungen hat Frau v. Kowalevsky (Journ. für Math., Bd. 80) gegeben. Die ersten hierher gehörigen Untersuchungen stammen von Cauchy (Oeuvres, 1re série, t. VII).

in deren Umgebung sie sich regulär verhält, verschwindet, während die Ableitung $\frac{\partial F}{\partial p_1}$ an dieser Stelle von Null verschieden ist. Es sei eine analytische Funktion $\varphi(x_2, \ldots, x_n)$ gegeben, welche in der Umgebung von $x_2 = x_2^0, \ldots, x_n = x_n^0$ regulär ist; an dieser Stelle sei

$$\varphi = z^0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = p_2^0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} = p_n^0 .$$

Die Differentialgleichung (A) wird durch eine einzige analytische Funktion $z = \Phi(x_1, \ldots, x_n)$ befriedigt, welche sich in der Umgebung der Stelle $x_1 = x_1^0, \ldots, x_n = x_n^0$ regulär verhält und für $x_1 = x_1^0$ in die gegebene Funktion $\varphi(x_2, \ldots, x_n)$ übergeht.

Wir beschäftigen uns zunächst mit linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, d. h. wir setzen die Funktion $F(x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n)$ als linear in bezug auf $p_1, \ldots, p_n$ voraus.

Im zweiten Abschnitt kehren wir zu nicht linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zurück, wobei wir uns wie später bei der Behandlung der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung in der Regel auf zwei unabhängige Veränderliche beschränken.

§ 3. Die homogene lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung*).

Die lineare partielle Differentialgleichung

$$\text{(B)} \qquad \xi_1(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + \xi_n(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

habe als Koeffizienten analytische Funktionen $\xi_1, \ldots, \xi_n$ von $x_1, \ldots, x_n$, welche sich in der Umgebung der Stelle $x_1 = x_1^0, \ldots, x_n = x_n^0$ regulär verhalten. Ist $\xi_1(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ von Null verschieden, so

*) Die Sätze dieses Paragraphen lassen sich auch aus der Theorie der Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen ableiten. Vgl. „Gewöhnl. Differentialgl.“, § 7.

besitzt die Differentialgleichung (B) eine und nu eine Lösung

(11) $$f = f_k = f_k(x_1, \ldots, x_n) \qquad (k = 2, \ldots, n)$$

welche sich in der Umgebung der Stelle $x_1 = x_1^0, \ldots$ $x_n = x_n^0$ regulär verhält und sich für $x_1 = x_1^0$ auf x reduziert.

Denn die Differentialgleichung (B) läßt sich auf di Form bringen:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = -\sum_{k=2}^{n} \frac{\xi_k(x_1, \ldots, x_n)}{\xi_1(x_1, \ldots, x_n)} \frac{\partial f}{\partial x_k};$$

da die Funktionen $\frac{\xi_k}{\xi_1}$ in der Umgebung der Stelle

$$x_1 = x_1^0, \quad \ldots, \quad x_n = x_n^0$$

regulär sind, so gilt der in § 2 ausgesprochene Satz.

Eine beliebige Lösung $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ der partiellen Differentialgleichung (B) läßt sich als Funktion von $f_2, \ldots, f_n$ darstellen.

Denn durch die Gleichungen

$$\begin{gathered} f_2 = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_n = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{gathered}$$

werden $x_2, \ldots, x_n$ als Funktionen von $x_1, f_2, \ldots, f_n$ definiert, so daß

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \varphi(x_1, f_2, \ldots, f_n)$$

als Funktion von $x_1, f_2, \ldots, f_n$ betrachtet werden kann. Wir haben nur zu zeigen, daß die Funktion φ von x_1 unabhängig ist.

Es ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1} &= \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial f_n}\frac{\partial f_n}{\partial x_1}, \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} &= \frac{\partial \varphi}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial f_n}\frac{\partial f_n}{\partial x_2}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} &= \frac{\partial \varphi}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_n} + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial f_n}\frac{\partial f_n}{\partial x_n}, \end{aligned}$$

so daß die Gleichung

$$\xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

in

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \sum_{i=2}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial f_i} \left(\xi_1 \frac{\partial f_i}{\partial x_1} + \dots + \xi_n \frac{\partial f_i}{\partial x_n} \right) = 0$$

übergeht. Da die Klammerausdrücke verschwinden, so ist

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = 0 ,$$

w. z. b. w.

Der Ausdruck

(12) $$f = \varphi(f_2, \dots, f_n) ,$$

wo φ eine willkürliche Funktion bezeichnet, stellt eine Lösung der Differentialgleichung (B) dar.

Denn es ist

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \sum_{k=2}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial f_k} \frac{\partial f_k}{\partial x_1} ,$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_n} = \sum_{k=2}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial f_k} \frac{\partial f_k}{\partial x_n} ,$$

also

$$\xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

$$= \sum_{k=2}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial f_k} \left(\xi_1 \frac{\partial f_k}{\partial x_1} + \dots + \xi_n \frac{\partial f_k}{\partial x_n} \right)$$

gleich Null, da die Klammerausdrücke auf der rechten Seite verschwinden.

Der Ausdruck (12) mit der willkürlichen Funktion φ wird als die allgemeine Lösung oder das allgemeine Integral der linearen partiellen Differentialgleichung (B) bezeichnet.

Ist $\varphi(x_2, \dots, x_n)$ eine an der Stelle $x_2 = x_2^0, \dots, x_n = x_n^0$ reguläre Funktion von $x_2, \dots, x_n$, so ist

$$f = \varphi(f_2, \dots, f_n)$$

eine Funktion von $x_1, \ldots, x_n$, welche sich an der Stelle $x_1 = x_1^0, \ldots, x_n = x_n^0$ regulär verhält, sich für $x_1 = x_1^0$ auf $\varphi(x_2, \ldots, x_n)$ reduziert und der partiellen Differentialgleichung (B) genügt.

Denn für $x_1 = x_1^0$ ist $f_2 = x_2, \ldots, f_n = x_n$; für $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0, \ldots, x_n = x_n^0$ ist also $f_2 = x_2^0, \ldots, f_n = x_n^0$.

Die $n-1$ Gleichungen

$$(13) \qquad \begin{cases} f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_2^0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_n^0 \end{cases}$$

bestimmen $x_2, \ldots, x_n$ als Funktionen von x_1, welche sich in der Umgebung von $x_1 = x_1^0$ regulär verhalten und für $x_1 = x_1^0$ die Werte $x_2 = x_2^0, \ldots, x_n = x_n^0$ annehmen. Diese Funktionen

$$(14) \qquad x_2 = \varphi_2(x_1), \quad \ldots, \quad x_n = \varphi_n(x_1)$$

genügen dem System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$(15) \qquad \frac{dx_1}{\xi_1} = \frac{dx_2}{\xi_2} = \cdots = \frac{dx_n}{\xi_n}.$$

Daß sich die Gleichungen (13) in der angegebenen Weise nach $x_2, \ldots, x_n$ auflösen lassen, folgt daraus, daß die Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(f_2, \ldots, f_n)}{\partial(x_2, \ldots, x_n)}$$

für $x_1 = x_1^0, \ldots, x_n = x_n^0$ von Null verschieden ist. Wenn man die Gleichungen (13) differentiiert, indem man $x_2, \ldots, x_n$ als Funktionen von x_1 auffaßt, erhält man die $n-1$ Gleichungen

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dx_1} + \cdots + \frac{\partial f_2}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dx_1} = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\frac{\partial f_n}{\partial x_1} + \frac{\partial f_n}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dx_1} + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dx_1} = 0, \end{aligned}$$

durch welche

$$\frac{dx_2}{dx_1}, \quad \ldots, \quad \frac{dx_n}{dx_1}$$

als Funktionen von $x_1, \ldots, x_n$ eindeutig bestimmt sin
Aus den $n-1$ Gleichungen

$$\xi_1 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \cdots + \xi_n \frac{\partial f_2}{\partial x_n} = 0\,,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\xi_1 \frac{\partial f_n}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial f_n}{\partial x_2} + \cdots + \xi_n \frac{\partial f_n}{\partial x_n} = 0$$

erhält man für

$$\frac{\xi_2}{\xi_1}\,, \quad \ldots, \quad \frac{\xi_n}{\xi_1}$$

dieselben Werte wie vorhin für

$$\frac{dx_2}{dx_1}\,, \quad \ldots, \quad \frac{dx_n}{dx_1}\,.$$

Also ist

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\xi_2}{\xi_1}\,, \quad \ldots, \quad \frac{dx_n}{dx_1} = \frac{\xi_n}{\xi_1}\,,$$

w. z. b. w.

Eine Funktion $f(x_1, \ldots, x_n)$ der Veränderliche
$x_1, \ldots, x_n$, welche einen konstanten (von x_1 una
hängigen) Wert annimmt, wenn man für $x_2, \ldots,$
eine beliebige Lösung $x_2 = \varphi_2(x_1), \ldots, x_n = \varphi_n(x_1)$ d
Systems (15) einsetzt, stellt eine Lösung der lin
aren partiellen Differentialgleichung (B) dar.

Der Voraussetzung gemäß ist nämlich, wenn m
$x_2 = \varphi_2(x_1), \ldots, x_n = \varphi_n(x_1)$ setzt,

$$\frac{df(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{dx_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dx_1} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{dx}{dx}$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\xi_2}{\xi_1}\frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\xi_n}{\xi_1}\frac{\partial f}{\partial x_n} = 0\,.$$

Diese Gleichung ist erfüllt, wenn man x_1 beliebig annimm
aber $x_2, \ldots, x_n$ aus irgendeiner Lösung des Systems (1
berechnet. Ist $x_1 = x_1^0, x_2 = x_2^0, \ldots, x_n = x_n^0$ eine beliebi
Stelle, an welcher sich die Funktionen $\xi_1, \ldots, \xi_n$ regul
verhalten und ξ_1 nicht verschwindet, so sind Funktion
$x_2, \ldots, x_n$ von x_1 vorhanden, welche dem System (15) g
nügen und für $x_1 = x_1^0$ die Werte $x_2 = x_2^0, \ldots, x_n = x_n^0$ a

CARNEGIE INSTITUTE
OF TECHNOLOGY LIBRARY

nehmen. Die letzte Gleichung, welche für die beliebigen Werte $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0$, ..., $x_n = x_n^0$ erfüllt ist, ist also identisch erfüllt.

§ 4. Die nicht homogene lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung.

Wir wenden uns zu der Differentialgleichung

$$(C) \qquad \xi_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + \ldots + \xi_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = \zeta\,,$$

wo $\xi_1, \ldots, \xi_n, \zeta$ Funktionen von $x_1, \ldots, x_n, z$ sind, welche sich in der Umgebung der Stelle $x_1 = x_1^0, \ldots, x_n = x_n^0$, $z = z^0$ regulär verhalten; ξ_1 sei an dieser Stelle von Null verschieden.

Wir nehmen die homogene lineare partielle Differentialgleichung

$$(16) \qquad \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

mit der abhängigen Veränderlichen f und den unabhängigen Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n, z$ zu Hilfe. Die Differentialgleichung (16) besitzt nach § 3 die Lösungen $f_2, \ldots, f_n, f_{n+1}$, welche in der Umgebung der Stelle $x_1 = x_1^0, \ldots, x_n = x_n^0$, $z = z^0$ regulär sind und für $x_1 = x_1^0$ die Werte $f_2 = x_2, \ldots, f_n = x_n$, $f_{n+1} = z$ annehmen. Die allgemeinste Lösung der Gleichung (16) ist von der Form

$$\psi(f_2, \ldots, f_n, f_{n+1})\,,$$

wo ψ eine willkürliche Funktion der beigefügten n Argumente darstellt.

Die Gleichung

$$(17) \qquad \psi(f_2, \ldots, f_n, f_{n+1}) = 0$$

definiert, wenn ihre linke Seite nicht von z unabhängig ist, eine Funktion

$$(18) \qquad z = \Phi(x_1, \ldots, x_n)$$

von $x_1, \ldots, x_n$, welche der Differentialgleichung (C) genügt.

Die Gleichung (17), welche, nachdem man z durch die Funktion Φ ersetzt hat, identisch in $x_1, \ldots, x_n$ erfüllt ist, möge nach diesen n Veränderlichen differentiiert werden. Man erhält so die n Gleichungen

$$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{\partial \psi}{\partial f_k}\left(\frac{\partial f_k}{\partial x_1} + \frac{\partial f_k}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_1}\right) = 0\,,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{\partial \psi}{\partial f_k}\left(\frac{\partial f_k}{\partial x_n} + \frac{\partial f_k}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_n}\right) = 0\,.$$

Wenn man dieselben mit $\xi_1, \ldots, \xi_n$ multipliziert und addiert und dabei beachtet, daß

$$\xi_1 \frac{\partial f_i}{\partial x_1} + \ldots + \xi_n \frac{\partial f_i}{\partial x_n} = -\zeta \frac{\partial f_i}{\partial z} \qquad (i = 2, \ldots, n+1)$$

ist, so erhält man die Gleichung

$$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{\partial \psi}{\partial f_k}\frac{\partial f_k}{\partial z}\cdot\left(\xi_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + \ldots + \xi_n \frac{\partial z}{\partial x_n} - \zeta\right) = 0$$

oder

$$\frac{\partial \psi}{\partial z}\left(\xi_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + \ldots + \xi_n \frac{\partial z}{\partial x_n} - \zeta\right) = 0\,.$$

Da die Funktion ψ nicht von z unabhängig sein, ihr partieller Differentialquotient nach z also nicht verschwinden soll, so ist

$$\xi_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + \ldots + \xi_n \frac{\partial z}{\partial x_n} - \zeta = 0\,,$$

d. h. $z = \Phi(x_1, \ldots, x_n)$ genügt der partiellen Differentialgleichung (C).

Ist eine Funktion z von $x_1, \ldots, x_n$ vorhanden, welche den $n+1$ Gleichungen

$$\xi_1 = 0\,, \ldots, \quad \xi_n = 0\,, \quad \zeta = 0$$

genügt, so ist auch die Differentialgleichung (C) erfüllt. Eine derartige Lösung der Differentialgleichung (C) wird als **singuläre Lösung** bezeichnet. Eine Lösung von (C), für welche $\xi_1 = 0, \ldots, \xi_n = 0$ ist, erfüllt auch die Gleichung $\zeta = 0$, ist also singulär. Ist $z = \Phi(x_1, \ldots, x_n)$

eine nicht singuläre Lösung von (C), so sind Wertsysteme $x_1^0, \ldots, x_n^0, z^0$ vorhanden, welche der Gleichung $z^0 = \Phi(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ genügen und für welche eine der Funktionen $\xi_1, \ldots, \xi_n$, z. B. ξ_1, von Null verschieden ist. In der Umgebung von $x_1 = x_1^0, \ldots, x_n = x_n^0, z = z^0$ sollen $\xi_1, \ldots, \xi_n, \zeta$ regulär sein*).

Jede nicht singuläre Lösung $z = \Phi(x_1, \ldots, x_n)$ der Differentialgleichung (C) genügt einer Gleichung von der Form (17)

$$\psi(f_2, \ldots, f_n, f_{n+1}) = 0 .$$

Denn führt man vermittels der Gleichungen

$$\begin{gathered} f_2(x_1, \ldots, x_n, z) = f_2 , \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_n(x_1, \ldots, x_n, z) = f_n , \\ f_{n+1}(x_1, \ldots, x_n, z) = f_{n+1} \end{gathered}$$

an Stelle von $x_2, \ldots, x_n, z$ die neuen Veränderlichen $f_2, \ldots, f_n, f_{n+1}$ ein, so geht die Gleichung

$$z = \Phi(x_1, \ldots, x_n)$$

in

$$\psi(x_1, f_2, \ldots, f_n, f_{n+1}) = 0$$

über.

Die letzte Gleichung ist, wenn $z = \Phi(x_1, \ldots, x_n)$ gesetzt wird, identisch in $x_1, \ldots, x_n$ erfüllt. Durch Differentiation nach $x_1, \ldots, x_n$ ergeben sich die Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{\partial \psi}{\partial f_k}\left(\frac{\partial f_k}{\partial x_1} + \frac{\partial f_k}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial x_1}\right) &= 0 , \\ \sum_{k=2}^{n+1} \frac{\partial \psi}{\partial f_k}\left(\frac{\partial f_k}{\partial x_2} + \frac{\partial f_k}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial x_2}\right) &= 0 , \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum_{k=2}^{n+1} \frac{\partial \psi}{\partial f_k}\left(\frac{\partial f_k}{\partial x_n} + \frac{\partial f_k}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial x_n}\right) &= 0 . \end{aligned}$$

*) Den Fall, daß für alle der Gleichung $z = \Phi(x_1, \ldots, x_n)$ genügenden Wertsysteme $x_1, \ldots, x_n, z$ eine der Funktionen $\xi_1, \ldots, \xi_n, \zeta$ sich nicht regulär verhält, schließen wir aus.

Wenn man dieselben mit $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ multipliziert und addiert, ergibt sich, da f_k der Gleichung (16) und z der Gleichung (C) genügt, die Gleichung

$$\xi_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{\partial \psi}{\partial f_k}\left(-\zeta \frac{\partial f_k}{\partial z} + \frac{\partial f_k}{\partial z} \cdot \zeta\right) = 0$$

oder

$$\xi_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_1} = 0 .$$

Da ξ_1 nicht identisch verschwinden soll, ist

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_1} = 0 ,$$

so daß ψ nur von $f_2, \ldots, f_n, f_{n+1}$ abhängt.

Da die Integration der partiellen Differentialgleichung (16) und die Integration des Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\text{(19)} \qquad \frac{dx_1}{\xi_1} = \ldots = \frac{dx_n}{\xi_n} = \frac{dz}{\zeta}$$

identische Aufgaben sind, so ist durch die vorangehenden Sätze die Integration der nicht homogenen linearen partiellen Differentialgleichung (C) auf die Integration des Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen (19) zurückgeführt, welches die Integralgleichungen

$$f_2(x_1, \ldots, x_n, z) = C_2 , \quad \ldots, \quad f_{n+1}(x_1, \ldots, x_n, z) = C_{n+1}$$

besitzt.

Ist $\varphi(x_2, \ldots, x_n)$ eine beliebige in der Umgebung der Stelle $x_2 = x_2^0, \ldots, x_n = x_n^0$ reguläre Funktion von $x_2, \ldots, x_n$, welche die Bedingung

$$\varphi(x_2^0, \ldots, x_n^0) = z^0$$

erfüllt*), so besitzt die Differentialgleichung (C) nach dem Fundamentalsatze in § 2 eine und nur eine Lösung

$$z = \Phi(x_1, \ldots, x_n) ,$$

*) Wie oben soll ξ_1 an der Stelle $x_1 = x_1^0, \ldots, x_n = x_n^0$, $z = z^0$ von Null verschieden sein.

welche sich in der Umgebung der Stelle $x_1 = x_1^0, \ldots, x_n = x_n^0$ regulär verhält und sich für $x_1 = x_1^0$ auf $\varphi(x_2, \ldots, x_n)$ reduziert. Diese Lösung erhält man dadurch, daß man die Gleichung

(20) $$f_{n+1} = \varphi(f_2, \ldots, f_n)$$

nach z auflöst.

Der nach z genommene partielle Differentialquotient des Ausdrucks

$$f_{n+1} - \varphi(f_2, \ldots, f_n)$$

reduziert sich für $x_1 = x_1^0, \ldots, x_n = x_n^0$ auf 1, da sich die Funktionen $f_2, \ldots, f_n, f_{n+1}$ für $x_1 = x_1^0$ bzw. auf $x_2, \ldots, x_n, z$ reduzieren. Folglich wird die Gleichung (20) durch eine Funktion $z = \Phi(x_1, \ldots, x_n)$ befriedigt, welche sich an der Stelle $x_1 = x_1^0, \ldots, x_n = x_n^0$ regulär verhält und für $x_1 = x_1^0$ in $\varphi(x_2, \ldots, x_n)$ übergeht. Daß die Funktion $z = \Phi(x_1, \ldots, x_n)$ der Differentialgleichung (C) genügt, ist oben gezeigt worden*).

§ 5. Systeme linearer partieller Differentialgleichungen.

Wir betrachten ein System von p linearen partiellen Differentialgleichungen mit der abhängigen Veränderlichen f und den n unabhängigen Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n$:

(21) $$\begin{cases} \xi_{11}\dfrac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_{12}\dfrac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + \xi_{1n}\dfrac{\partial f}{\partial x_n} = 0, \\ \xi_{21}\dfrac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_{22}\dfrac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + \xi_{2n}\dfrac{\partial f}{\partial x_n} = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \xi_{p1}\dfrac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_{p2}\dfrac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + \xi_{pn}\dfrac{\partial f}{\partial x_n} = 0; \end{cases}$$

die Koeffizienten $\xi_{i1}, \xi_{i2}, \ldots, \xi_{in}$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$ sind gegebene Funktionen von $x_1, \ldots, x_n$, welche sich an der Stelle $x_1 = x_1^0, \ldots, x_n = x_n^0$ regulär verhalten sollen.

Es fragt sich, ob die p Gleichungen (21) gemeinsame Lösungen f besitzen.

---

*) Vgl. auch § 12.

Wir setzen

$$X_i(f) = \xi_{i1}\frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_{i2}\frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + \xi_{in}\frac{\partial f}{\partial x_n} \tag{22}$$
$$(i = 1, \dots, p),$$

so daß die Gleichungen (21) lauten:

$$X_1(f) = 0, \; X_2(f) = 0, \; \dots, \; X_p(f) = 0 . \tag{23}$$

Wir setzen voraus, daß diese p Gleichungen voneinander unabhängig sind, d. h. daß keine Relation von der Form

$$\lambda_1 X_1(f) + \lambda_2 X_2(f) + \dots + \lambda_p X_p(f) = 0 ,$$

wo $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ Funktionen von $x_1, \dots, x_n$ darstellen, für alle Funktionen f besteht.

Sind φ_1 und φ_2 zwei Funktionen von $x_1, \dots, x_n$, so ist

$$X_i(\varphi_1 + \varphi_2) = X_i(\varphi_1) + X_i(\varphi_2) ,$$
$$X_i(\varphi_1 \varphi_2) = \varphi_1 X_i(\varphi_2) + \varphi_2 X_i(\varphi_1) .$$

Ersetzt man in $X_i(\varphi)$ die Funktion φ durch $X_k(f)$, so erhält man

$$X_i(X_k(f)) = \sum_{\nu=1}^{n} X_i(\xi_{k\nu})\frac{\partial f}{\partial x_\nu} + \sum_{\nu=1}^{n} \xi_{k\nu} X_i\left(\frac{\partial f}{\partial x_\nu}\right);$$

durch Vertauschung der Indizes i und k ergibt sich

$$X_k(X_i(f)) = \sum_{\nu=1}^{n} X_k(\xi_{i\nu})\frac{\partial f}{\partial x_\nu} + \sum_{\nu=1}^{n} \xi_{i\nu} X_k\left(\frac{\partial f}{\partial x_\nu}\right).$$

Es ist aber

$$\sum_{\nu=1}^{n} \xi_{k\nu} X_i\left(\frac{\partial f}{\partial x_\nu}\right) = \sum_{\nu=1}^{n} \xi_{k\nu} \sum_{\mu=1}^{n} \xi_{i\mu} \frac{\partial^2 f}{\partial x_\mu \partial x_\nu}$$
$$= \sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n} \xi_{i\mu}\xi_{k\nu} \frac{\partial^2 f}{\partial x_\mu \partial x_\nu};$$

derselbe Ausdruck ergibt sich für

$$\sum_{\nu=1}^{n} \xi_{i\nu} X_k\left(\frac{\partial f}{\partial x_\nu}\right).$$

Demnach ist

$$(24)\quad X_i(X_k(f)) - X_k(X_i(f)) = \sum_{\nu=1}^{n} \{X_i(\xi_{k\nu}) - X_k(\xi_{i\nu})\} \frac{\partial f}{\partial x_\nu} \text{*)}.$$

Genügt die Funktion f den p partiellen Differentialgleichungen (23), so ist

$$X_i(f) = 0\,, \quad X_k(f) = 0\,,$$

also auch

$$X_i(X_k(f)) = X_i(0) = 0\,,$$

$$X_k(X_i(f)) = X_k(0) = 0\,;$$

mithin ist auch die Gleichung

$$X_i(X_k(f)) - X_k(X_i(f)) = 0$$

erfüllt, welche ebenfalls eine lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung darstellt.

Das System (23) wird ein **vollständiges System** genannt, wenn jeder der Ausdrücke

$$X_i(X_k(f)) - X_k(X_i(f)) \qquad (i\,,\ k = 1\,,\ \ldots\,,\ n)$$

eine lineare homogene Funktion der p Ausdrücke $X_1(f)$, ..., $X_p(f)$ ist, wenn also solche Funktionen ϱ_{ik1}, ..., ϱ_{ikp} von x_1, ..., x_n vorhanden sind, daß die Gleichung

$$X_i(X_k(f)) - X_k(X_i(f)) = \varrho_{ik1} X_1(f) + \ldots + \varrho_{ikp} X_p(f)$$

für alle Funktionen f erfüllt ist; hierzu ist erforderlich, daß $\dfrac{\partial f}{\partial x_\nu}$ $(\nu = 1\,,\ \ldots\,,\ n)$ auf der linken Seite dieser Gleichung denselben Koeffizienten besitzt wie auf der rechten Seite.

Bilden die Gleichungen (23) kein vollständiges System, so fügen wir diejenigen unter den Gleichungen

$$X_i(X_k(f)) - X_k(X_i(f)) = 0$$

---

*) Gebräuchlich ist die Bezeichnung

$$X_i(X_k(f)) - X_k(X_i(f)) = (X_i\, X_k)$$

(Klammerausdruck).

hinzu, welche voneinander und von den p ursprünglichen Gleichungen unabhängig sind. Wir erhalten so ein System von $p' > p$ Gleichungen

$$X_1(f) = 0\,, \quad \ldots, \quad X_{p'}(f) = 0\,,$$

auf welches, wenn es nicht vollständig ist, das beschriebene Verfahren wiederum angewandt wird. So erhält man schließlich entweder $q < n$ Gleichungen

$$X_1(f) = 0\,, \quad \ldots, \quad X_q(f) = 0\,,$$

welche ein vollständiges System bilden, oder n unabhängige Gleichungen

$$X_1(f) = 0\,, \quad \ldots, \quad X_n(f) = 0\,,$$

welche nur erfüllt sind, wenn

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0\,, \quad \ldots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0\,,$$

also f konstant ist.

Wir beschäftigen uns demgemäß mit einem System von q voneinander unabhängigen linearen Differentialgleichungen

$$X_1(f) = 0\,, \quad \ldots, \quad X_q(f) = 0\,, \tag{25}$$

worin

$$X_i(f) = \sum_{\nu=1}^{n} \xi_{i\nu}(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_\nu} \qquad (i = 1, \ldots, q)$$

und, wenn unter i und k zwei beliebige der Zahlen $1, \ldots, q$ verstanden werden,

$$X_i(X_k(f)) - X_k(X_i(f))$$
$$= \varrho_{ik1}(x_1, \ldots, x_n) X_1(f) + \ldots + \varrho_{ikq}(x_1, \ldots, x_n) X_q(f)$$

ist. Dann bilden die Gleichungen (25) ein q-gliedriges vollständiges System.

Wir führen an Stelle von $x_1, \ldots, x_n$ vermittels der Gleichungen

$$y_1 = \varphi_1(x_1, \ldots, x_n)\,,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_n = \varphi_n(x_1, \ldots, x_n)$$

neue unabhängige Veränderliche $y_1, \ldots, y_n$ ein; die Substitutionsgleichungen sollen nach $x_1, \ldots, x_n$ auflösbar sein, so daß

$$x_1 = \psi_1(y_1, \ldots, y_n)\,,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_n = \psi_n(y_1, \ldots, y_n)$$

ist.

Dann ist

$$\frac{\partial f}{\partial x_\nu} = \frac{\partial f}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_\nu} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x_\nu}\,, \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

also

$$\begin{aligned} X_i(f) &= \sum_{\nu=1}^{n} \xi_{i\nu}(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial f}{\partial x_\nu} \\ &= \frac{\partial f}{\partial y_1}\sum_{\nu=1}^{n}\xi_{i\nu}\frac{\partial y_1}{\partial x_\nu} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial y_n}\sum_{\nu=1}^{n}\xi_{i\nu}\frac{\partial y_n}{\partial x_\nu} \\ &= X_i(y_1)\frac{\partial f}{\partial y_1} + \ldots + X_i(y_n)\frac{\partial f}{\partial y_n}\,. \end{aligned}$$

Wir bezeichnen den Ausdruck $X_i(y_\nu)$ nach Einführung der Veränderlichen $y_1, \ldots, y_n$ mit $\eta_{i\nu}(y_1, \ldots, y_n)$ und setzen

$$Y_i(f) = \sum_{\nu=1}^{n} \eta_{i\nu}(y_1, \ldots, y_n)\frac{\partial f}{\partial y_\nu}\,.$$

Dann ist für jede Funktion f

$$X_i(f) = Y_i(f)\,;$$

auf der linken Seite wird f als Funktion von $x_1, \ldots, x_n$, auf der rechten Seite als Funktion von $y_1, \ldots, y_n$ aufgefaßt. Ersetzt man f durch $X_k(f) = Y_k(f)$, so hat man

$$X_i(X_k(f)) = Y_i(Y_k(f))\,,$$

ebenso erhält man

$$X_k(X_i(f)) = Y_k(Y_i(f))\,,$$

also ist

$$Y_i(Y_k(f)) - Y_k(Y_i(f)) = X_i(X_k(f)) - X_k(X_i(f))\,.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist gleich

$$\varrho_{ik1}(x_1, \ldots, x_n) X_1(f) + \ldots + \varrho_{ikq}(x_1, \ldots, x_n) X_q(f) .$$

Setzt man

$$\varrho_{ik\nu}(x_1, \ldots, x_n) = \sigma_{ik\nu}(y_1, \ldots, y_n) ,$$

so ist

$$Y_i(Y_k(f)) - Y_k(Y_i(f))$$
$$= \sigma_{ik1}(y_1, \ldots, y_n) Y_1(f) + \ldots + \sigma_{ikq}(y_1, \ldots, y_n) Y_q(f) .$$

Damit ist gezeigt, daß auch die Gleichungen

$$Y_1(f) = 0 , \quad \ldots, \quad Y_q(f) = 0$$

ein vollständiges System bilden.

Wir verstehen unter

$$\begin{matrix} A_{11}, & \ldots, & A_{1q}, \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{q1}, & \ldots, & A_{qq} \end{matrix}$$

Funktionen von $x_1, \ldots, x_n$, deren Determinante nicht identisch verschwindet, und setzen

$$Z_1(f) = A_{11} X_1(f) + \ldots + A_{1q} X_q(f) ,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$Z_q(f) = A_{q1} X_1(f) + \ldots + A_{qq} X_q(f) ;$$

dann lassen sich auch $X_1(f), \ldots, X_q(f)$ linear durch $Z_1(f), \ldots, Z_q(f)$ ausdrücken.

Wir nennen das System

$$Z_1(f) = 0 , \quad \ldots, \quad Z_q(f) = 0$$

dem System (25) äquivalent und zeigen, daß auch das neue System vollständig ist.

Da $Z_i(f)$ eine Summe von Gliedern $A_{ii'} X_{i'}(f)$ $(i' = 1, \ldots, q)$ und $Z_k(f)$ eine Summe von Gliedern $A_{kk'} X_{k'}(f)$ $(k' = 1, \ldots, q)$ ist, so ist der Ausdruck

$$Z_i(Z_k(f)) - Z_k(Z_i(f))$$

eine Summe von Gliedern von der Form

$$\begin{aligned} & A_{ii'} X_{i'}(A_{kk'} X_{k'}(f)) - A_{kk'} X_{k'}(A_{ii'} X_{i'}(f)) \\ = \; & A_{ii'} [X_{i'}(A_{kk'}) X_{k'}(f) + A_{kk'} X_{i'}(X_{k'}(f))] \\ - \; & A_{kk'} [X_{k'}(A_{ii'}) X_{i'}(f) + A_{ii'} X_{k'}(X_{i'}(f))] \\ = \; & A_{ii'} X_{i'}(A_{kk'}) X_{k'}(f) - A_{kk'} X_{k'}(A_{ii'}) X_{i'}(f) \\ + \; & A_{ii'} A_{kk'} [X_{i'}(X_{k'}(f)) - X_{k'}(X_{i'}(f))] . \end{aligned}$$

Da sämtliche Ausdrücke
$$X_{i'}(X_{k'}(f)) - X_{k'}(X_{i'}(f))$$
lineare Funktionen von $X_1(f), \ldots, X_q(f)$ sind, so ist auch
$$Z_i(Z_k(f)) - Z_k(Z_i(f))$$
eine lineare Funktion von $X_1(f), \ldots, X_q(f)$ und folglich auch eine lineare Funktion von $Z_1(f), \ldots, Z_q(f)$, w. z. b. w.

Wir denken uns die Funktionen A_{ik} so gewählt, daß die Gleichungen
$$Z_1(f) = 0\,, \quad \ldots, \quad Z_q(f) = 0$$
bzw. nach
$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_q}$$
aufgelöst erscheinen. Wir können daher den weiteren Betrachtungen ein vollständiges System von folgender Gestalt zugrunde legen:
$$\text{(D)} \quad \begin{cases} X_1(f) = \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_{1,q+1}\dfrac{\partial f}{\partial x_{q+1}} + \ldots + \xi_{1n}\dfrac{\partial f}{\partial x_n} = 0\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_q(f) = \dfrac{\partial f}{\partial x_q} + \xi_{q,q+1}\dfrac{\partial f}{\partial x_{q+1}} + \ldots + \xi_{qn}\dfrac{\partial f}{\partial x_n} = 0\,. \end{cases}$$
Ein vollständiges System von der besonderen Form (D) bezeichnen wir als Jacobisches System.

Es muß
$$X_i(X_k(f)) - X_k(X_i(f)) = \varrho_{ik1}X_1(f) + \ldots + \varrho_{ikq}X_q(f)$$
sein. Auf der linken Seite dieser Gleichung hat $\dfrac{\partial f}{\partial x_h}$ $(h = 1, \ldots, q)$ den Koeffizienten
$$X_i(\xi_{kh}) - X_k(\xi_{ih})\,,$$
welcher verschwindet, da ξ_{ih} und ξ_{kh} konstant (1 oder 0) sind; der Koeffizient von $\dfrac{\partial f}{\partial x_h}$ auf der rechten Seite ist gleich ϱ_{ikh}. Folglich ist
$$\varrho_{ikh} = 0\,. \qquad (h = 1, \ldots, q)$$

Für ein Jacobisches System ist also

$$(26) \qquad X_i(X_k(f)) - X_k(X_i(f)) = 0\,. \quad (i, k = 1, \ldots, q)$$

Setzt man den Koeffizienten von $\frac{\partial f}{\partial x_\nu}$ $(\nu = q+1, \ldots, n)$ auf der linken Seite dieser Gleichung gleich Null, so erhält man die Gleichungen

$$X_i(\xi_{k\nu}) - X_k(\xi_{i\nu}) = 0 \tag{27}$$

$$(i, k = 1, \ldots, q; \quad \nu = q+1, \ldots, n).$$

§ 6. Integration eines vollständigen Systems linearer partieller Differentialgleichungen.

Wir betrachten jetzt ein Jacobisches System (D), dessen Koeffizienten

$$\xi_{i\nu} \ (i = 1, \ldots, q; \ \nu = q+1, \ldots, n)$$

sich in der Umgebung der Stelle

$$x_1 = x_1^0, \quad \ldots, \quad x_n = x_n^0$$

regulär verhalten. Wir zeigen, daß das System (D) eine Lösung $f = f_\nu(x_1, \ldots, x_n)$ besitzt, welche sich in der Umgebung der Stelle $x_1 = x_1^0, \ldots, x_n = x_n^0$ regulär verhält und sich für $x_1 = x_1^0, \ldots, x_q = x_q^0$ auf x_ν reduziert, wo ν eine der Zahlen $q+1, \ldots, n$ darstellt.

Im Falle $q = 1$, also für eine einzige lineare partielle Differentialgleichung, ist nach § 3 dieser Satz richtig; wir zeigen, daß er für ein q-gliedriges Jacobisches System gilt, wenn er für ein $(q-1)$-gliedriges Jacobisches System als bewiesen vorausgesetzt wird.

Die lineare Differentialgleichung

$$X_1(f) = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_{1,q+1}\frac{\partial f}{\partial x_{q+1}} + \ldots + \xi_{1n}\frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

besitzt $n-1$ Lösungen $y_2, \ldots, y_n$, welche sich in der Umgebung der Stelle $x_1 = x_1^0, \ldots, x_n = x_n^0$ regulär verhalten und für $x_1 = x_1^0$ die Werte $y_2 = x_2, \ldots, y_n = x_n$ annehmen. Diese Lösungen sind

$$\begin{aligned}
y_2 &= x_2, \\
&\ldots \\
y_q &= x_q, \\
y_{q+1} &= x_{q+1} + (x_1 - x_1^0)\mathfrak{P}_{q+1}(x_1 - x_1^0, \ldots, x_n - x_n^0), \\
&\ldots\ldots \\
y_n &= x_n + (x_1 - x_1^0)\mathfrak{P}_n(x_1 - x_1^0, \ldots, x_n - x_n^0),
\end{aligned}$$

wo $\mathfrak{P}_{q+1}, \ldots, \mathfrak{P}_n$ Potenzreihen von $x_1 - x_1^0, \ldots, x_n - x_n^0$ darstellen.

Wir setzen noch $y_1 = x_1$ und führen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ an Stelle von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ als Veränderliche ein. Dadurch geht $X_1(f)$ in

$$Y_1(f) = \frac{\partial f}{\partial y_1} + X_1(y_{q+1}) \frac{\partial f}{\partial y_{q+1}} + \ldots + X_1(y_n) \frac{\partial f}{\partial y_n}$$

über; da aber $y_{q+1}, \ldots, y_n$ Lösungen der Gleichung $X_1(f) = 0$ sind, so ist

$$X_1(y_{q+1}) = 0, \quad \ldots, \quad X_1(y_n) = 0,$$

also

$$Y_1(f) = \frac{\partial f}{\partial y_1}.$$

Ferner geht $X_i(f)$ $(i = 2, \ldots, q)$ über in

$$Y_i(f) = \frac{\partial f}{\partial y_i} + X_i(y_{q+1}) \frac{\partial f}{\partial y_{q+1}} + \ldots + X_i(y_n) \frac{\partial f}{\partial y_n};$$

wir setzen

$$\eta_{i,q+1} = X_i(y_{q+1}), \quad \ldots, \quad \eta_{in} = X_i(y_n),$$

indem wir diese Ausdrücke als Funktionen von $y_1, \ldots, y_n$ auffassen, welche sich an der Stelle $y_1 = x_1^0, \ldots, y_n = x_n^0$ regulär verhalten.

Das Jacobische System (D) geht also in das System

$$Y_1(f) = \frac{\partial f}{\partial y_1} = 0,$$

$$Y_2(f) = \frac{\partial f}{\partial y_2} + \eta_{2,q+1} \frac{\partial f}{\partial y_{q+1}} + \ldots + \eta_{2n} \frac{\partial f}{\partial y_n} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$Y_q(f) = \frac{\partial f}{\partial y_q} + \eta_{q,q+1} \frac{\partial f}{\partial y_{q+1}} + \ldots + \eta_{qn} \frac{\partial f}{\partial y_n} = 0$$

über, welches wieder ein vollständiges und, da es nach $\frac{\partial f}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial y_q}$ aufgelöst ist, ein Jacobisches System sein muß. Es ist daher

$$Y_1(\eta_{i\nu}) - Y_i(0) = 0 \qquad (i = 2, \ldots, q; \ \nu = q+1, \ldots, n)$$

oder

$$Y_1(\eta_{i\nu}) = \frac{\partial \eta_{i\nu}}{\partial y_1} = 0\,;$$

d. h. die Koeffizienten

$$\eta_{i,q+1}, \ldots, \eta_{in} \qquad (i = 2, \ldots, q)$$

hängen nur von $y_2, \ldots, y_n$ ab; sie sind in der Umgebung der Stelle $y_2 = x_2^0, \ldots, y_n = x_n^0$ regulär.

Das ursprüngliche Jacobische System (D) und das $(q-1)$-gliedrige Jacobische System mit den $n-1$ unabhängigen Veränderlichen $y_2, \ldots, y_n$

$$(28)\quad \begin{cases} Y_2(f) = \dfrac{\partial f}{\partial y_2} + \eta_{2,q+1}\dfrac{\partial f}{\partial y_{q+1}} + \ldots + \eta_{2n}\dfrac{\partial f}{\partial y_n} = 0\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Y_q(f) = \dfrac{\partial f}{\partial y_q} + \eta_{q,q+1}\dfrac{\partial f}{\partial y_{q+1}} + \ldots + \eta_{qn}\dfrac{\partial f}{\partial y_n} = 0 \end{cases}$$

besitzen dieselben Lösungen.

Nach dem ausgesprochenen Satze, welcher für ein Jacobisches System von $q-1$ Differentialgleichungen als bewiesen vorausgesetzt wird, wird das System (28) durch eine Funktion f von $y_2, \ldots, y_n$ befriedigt, welche sich in der Umgebung der Stelle $y_2 = x_2^0, \ldots, y_n = x_n^0$ regulär verhält und sich, wenn man $y_2 = x_2^0, \ldots, y_q = x_q^0$ setzt, auf $y_\nu (\nu = q+1, \ldots, n)$ reduziert. Die Funktion f geht, wenn man

$$y_2 = x_2\,, \quad \ldots, \quad y_q = x_q\,,$$

$$y_\nu = x_\nu + (x_1 - x_1^0)\,\mathfrak{P}_\nu(x_1 - x_1^0, \ldots, x_n - x_n^0)$$
$$(\nu = q+1, \ldots, n)$$

setzt, in eine dem System (D) genügende, an der Stelle $x_1 = x_1^0, \ldots, x_n = x_n^0$ reguläre Funktion von $x_1, \ldots, x_n$ über; setzt man darin $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0, \ldots, x_q = x_q^0$, so wird auch $y_2 = x_2^0, \ldots, y_q = x_q^0$ und $y_{q+1} = x_{q+1}, \ldots, y_n = x_n$; die Funktion f reduziert sich demnach auf x_ν, wenn man $x_1 = x_1^0, \ldots, x_q = x_q^0$ setzt.

Damit ist die oben ausgesprochene Behauptung bewiesen.

Ist $\varphi(x_{q+1}, \ldots, x_n)$ eine Funktion der beigefügten $n-q$ Argumente, welche sich in der Umgebung der Stelle $x_{q+1}^0, \ldots, x_n^0$ regulär verhält, so ist

$$f = \varphi(f_{q+1}, \ldots, f_n)$$

eine dem System (D) genügende Funktion von $x_1, \ldots, x_n$, welche sich in der Umgebung der Stelle $x_1^0, \ldots, x_n^0$ regulär verhält und sich für $x_1 = x_1^0, \ldots, x_q = x_q^0$ auf die gegebene Funktion $\varphi(x_{q+1}, \ldots, x_n)$ reduziert.

Wir können also den folgenden Satz aussprechen:

In dem Jacobischen System linearer partieller Differentialgleichungen

$$(\mathrm{D}) \quad \begin{cases} X_1(f) = \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_{1,q+1}\dfrac{\partial f}{\partial x_{q+1}} + \cdots + \xi_{1n}\dfrac{\partial f}{\partial x_n} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ X_q(f) = \dfrac{\partial f}{\partial x_q} + \xi_{q,q+1}\dfrac{\partial f}{\partial x_{q+1}} + \cdots + \xi_{qn}\dfrac{\partial f}{\partial x_n} = 0 \end{cases}$$

seien $\xi_{1,q+1}, \ldots, \xi_{qn}$ analytische Funktionen von $x_1, \ldots, x_n$, welche sich in der Umgebung der Stelle $x_1^0, \ldots, x_n^0$ regulär verhalten und die Bedingungen (27)

$$X_i(\xi_{k\nu}) = X_k(\xi_{i\nu}) \qquad \begin{pmatrix} i, k = 1, \ldots, q, \\ \nu = q+1, \ldots, n \end{pmatrix}$$

erfüllen. Es sei eine Funktion $\varphi(x_{q+1}, \ldots, x_n)$ gegeben, welche sich in der Umgebung von $x_{q+1} = x_{q+1}^0, \ldots, x_n = x_n^0$ regulär verhält. Dann wird das System (D) durch eine Funktion $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ befriedigt, welche in der Umgebung der Stelle $x_1^0, \ldots, x_n^0$ regulär ist und für $x_1 = x_1^0, \ldots, x_q = x_q^0$ in die gegebene Funktion $\varphi(x_{q+1}, \ldots, x_n)$ übergeht.

Nach Mayer*) läßt sich die Integration eines Jacobischen Systems auf die Integration einer einzigen linearen partiellen Differentialgleichung zurückführen.

Wir formen das Jacobische System (D) dadurch um, daß wir an Stelle von $x_1, \ldots, x_q$ vermittels der Substitution

$$(29) \quad x_1 = x_1^0 + y_1, \quad x_2 = x_2^0 + y_1 y_2, \quad \ldots, \quad x_q = x_q^0 + y_1 y_q$$

*) Math. Annalen, Bd. 5.

die neuen Veränderlichen $y_1, \ldots, y_q$ einführen, während $x_{q+1}, \ldots, x_n$ beibehalten werden. Dann ist

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y_1} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + y_q \frac{\partial f}{\partial x_q},\\
\frac{\partial f}{\partial y_2} &= y_1 \frac{\partial f}{\partial x_2},\\
&\cdots\cdots\\
\frac{\partial f}{\partial y_q} &= y_1 \frac{\partial f}{\partial x_q},
\end{aligned}$$

und die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_{1,q+1} \frac{\partial f}{\partial x_{q+1}} + \cdots + \xi_{1n} \frac{\partial f}{\partial x_n} &= 0,\\
\frac{\partial f}{\partial x_2} + \xi_{2,q+1} \frac{\partial f}{\partial x_{q+1}} + \cdots + \xi_{2n} \frac{\partial f}{\partial x_n} &= 0,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\\
\frac{\partial f}{\partial x_q} + \xi_{q,q+1} \frac{\partial f}{\partial x_{q+1}} + \cdots + \xi_{qn} \frac{\partial f}{\partial x_n} &= 0
\end{aligned}$$

gehen über in

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned}
Y_1(f) &= \frac{\partial f}{\partial y_1} + \eta_{1,q+1} \frac{\partial f}{\partial x_{q+1}} + \cdots + \eta_{1n} \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0,\\
Y_2(f) &= \frac{\partial f}{\partial y_2} + \eta_{2,q+1} \frac{\partial f}{\partial x_{q+1}} + \cdots + \eta_{2n} \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
Y_q(f) &= \frac{\partial f}{\partial y_q} + \eta_{q,q+1} \frac{\partial f}{\partial x_{q+1}} + \cdots + \eta_{qn} \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0;
\end{aligned}\right.$$

dabei sind

$$(31)\quad \left\{\begin{aligned}
&\eta_{1,q+1} = \xi_{1,q+1} + y_2 \xi_{2,q+1} + \cdots + y_q \xi_{q,q+1},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\quad \eta_{1n} = \xi_{1n} + y_2 \xi_{2n} + \cdots + y_q \xi_{qn};\\
&\eta_{2,q+1} = y_1 \xi_{2,q+1}, \quad \ldots, \quad \eta_{2n} = y_1 \xi_{2n},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\eta_{q,q+1} = y_1 \xi_{q,q+1}, \quad \ldots, \quad \eta_{qn} = y_1 \xi_{qn}
\end{aligned}\right.$$

als Funktionen von $y_1, y_2, \ldots, y_q, x_{q+1}, \ldots, x_n$ darzustellen. Diese Funktionen sind in der Umgebung der Stelle

$$y_1 = 0, \quad y_2 = \beta_2, \quad \ldots, \quad y_q = \beta_q, \quad x_{q+1} = x_{q+1}^0, \quad \ldots, \quad x_n = x_n^0$$

(wo $\beta_2, \ldots, \beta_q$ beliebig sind) regulär; denn dieser Stelle entspricht nach der Rückkehr zu den ursprünglichen Veränderlichen die Stelle

$$x_1 = x_1^0, \; x_2 = x_2^0, \; \ldots, \; x_q = x_q^0, \; x_{q+1} = x_{q+1}^0, \; \ldots, \; x_n = x_n^0.$$

Die dem System (D) genügenden Funktionen $f_{q+1}, \ldots, f_n$, welche sich für $x_1 = x_1^0, \ldots, x_q = x_q^0$ bzw. auf $x_{q+1}, \ldots, x_n$ reduzieren, gehen durch die Substitution (29) in Lösungen des Systems (30) über, welche sich für $y_1 = 0$ auf bzw. $x_{q+1}, \ldots, x_n$ reduzieren. Es sei ν eine der Zahlen $q+1, \ldots, n$. Die dem System (30) genügende Funktion f_ν von $y_1, \ldots, y_q, x_{q+1}, \ldots, x_n$, welche sich für $y_1 = 0$ auf x_ν reduziert, genügt insbesondere auch der Differentialgleichung $Y_1(f) = 0$. Diese Differentialgleichung besitzt aber nur eine einzige an der Stelle $y_1 = 0, y_2 = \beta_2, \ldots, y_q = \beta_q, x_{q+1} = x_{q+1}^0, \ldots, x_n = x_n^0$ reguläre Lösung, welche für $y_1 = 0$ den Wert x_ν annimmt; also muß diese Lösung mit f_ν übereinstimmen.

Die Differentialgleichung $Y_1(f) = 0$ besitzt $n-1$ unabhängige Lösungen $y_2, \ldots, y_q, f_{q+1}, \ldots, f_n$. Die Integration des Jacobischen Systems (D) ist nach Mayer durch die Substitution (29) auf die Integration der linearen partiellen Differentialgleichung

$$(32) \qquad Y_1(f) = \frac{\partial f}{\partial y_1} + \eta_{1,q+1} \frac{\partial f}{\partial x_{q+1}} + \cdots + \eta_{1n} \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

zurückgeführt und damit auf die Integration des Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$(33) \qquad dy_1 = \frac{dx_{q+1}}{\eta_{1,q+1}} = \cdots = \frac{dx_n}{\eta_{1n}}$$

zwischen den Veränderlichen $y_1, x_{q+1}, \ldots, x_n$, wobei $y_2, \ldots, y_q$ als Parameter betrachtet werden.

§ 7. Vollständig integrierbare Systeme totaler Differentialgleichungen.

Wir haben in § 3 den Zusammenhang untersucht, welcher zwischen einer einzigen linearen partiellen Differentialgleichung und einem System gewöhnlicher Differentialgleichungen stattfindet.

Ein ähnlicher Zusammenhang besteht zwischen einem System von q linearen partiellen Differentialgleichungen mit n unabhängigen Veränderlichen und einem System von $n - q$ totalen Differentialgleichungen mit q unabhängigen und $n - q$ abhängigen Veränderlichen.

Wir denken uns unser System von q linearen partiellen Differentialgleichungen (das zunächst nicht vollständig zu sein braucht) nach q partiellen Ableitungen aufgelöst:

$$
\text{(D)} \quad \left\{
\begin{array}{l}
\dfrac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_{1,q+1} \dfrac{\partial f}{\partial x_{q+1}} + \cdots + \xi_{1n} \dfrac{\partial f}{\partial x_n} = 0 \,, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\dfrac{\partial f}{\partial x_q} + \xi_{q,q+1} \dfrac{\partial f}{\partial x_{q+1}} + \cdots + \xi_{qn} \dfrac{\partial f}{\partial x_n} = 0 \,;
\end{array}
\right.
$$

die ξ sind wie früher Funktionen von $x_1, \ldots, x_n$. Wir schreiben das folgende System totaler Differentialgleichungen an:

$$
\text{(E)} \quad \left\{
\begin{array}{l}
dx_{q+1} = \xi_{1,q+1}\, dx_1 + \cdots + \xi_{q,q+1}\, dx_q \,, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
dx_n = \xi_{1n}\, dx_1 + \cdots + \xi_{qn}\, dx_q \,.
\end{array}
\right.
$$

Wir beweisen den Satz:

Ist $f(x_1, \ldots, x_n)$ eine Lösung des Systems (D), so verschwindet df infolge des Systems totaler Differentialgleichungen (E).

Der Voraussetzung nach ist

$$
\frac{\partial f}{\partial x_i} = -\xi_{i,q+1} \frac{\partial f}{\partial x_{q+1}} - \cdots - \xi_{in} \frac{\partial f}{\partial x_n} \,, \quad (i = 1, \ldots, q)
$$

Also ist

$$
\begin{aligned}
df &= \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_q} dx_q \\
&+ \frac{\partial f}{\partial x_{q+1}} dx_{q+1} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n \\
&= \frac{\partial f}{\partial x_{q+1}} [dx_{q+1} - \xi_{1,q+1} dx_1 - \dots - \xi_{q,q+1} dx_q] \\
&+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&+ \frac{\partial f}{\partial x_n} [dx_n - \xi_{1n} dx_1 - \dots - \xi_{qn} dx_q] ;
\end{aligned}
$$

bestehen die Gleichungen (E), so ist $df = 0$.

Der Satz läßt sich umkehren:

Jede Funktion $f(x_1, \dots, x_n)$, deren Differential df infolge der Gleichungen (E) verschwindet, ist eine Lösung des Systems (D).

Denn vermöge der Gleichungen (E) wird

$$
\begin{aligned}
df &= \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_q} dx_q \\
&+ \frac{\partial f}{\partial x_{q+1}} dx_{q+1} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n \\
&= \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_{1,q+1} \frac{\partial f}{\partial x_{q+1}} + \dots + \xi_{1n} \frac{\partial f}{\partial x_n}\right] dx_1 \\
&+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&+ \left[\frac{\partial f}{\partial x_q} + \xi_{q,q+1} \frac{\partial f}{\partial x_{q+1}} + \dots + \xi_{qn} \frac{\partial f}{\partial x_n}\right] dx_q .
\end{aligned}
$$

Soll dieser Ausdruck für beliebige Werte von $dx_1, \dots, dx_q$ verschwinden, so müssen die Koeffizienten von $dx_1, \dots, dx_q$ verschwinden, d. h. f muß dem System (D) genügen.

Eine Funktion $f(x_1, \dots, x_n)$, deren Differential infolge der totalen Differentialgleichungen (E) verschwindet, heißt ein **Integral** des Systems (E). Wir können also sagen:

Jede Lösung des Systems (D) ist ein Integral des Systems (E); jedes Integral des Systems (E) ist eine Lösung des Systems (D).

Wir setzen jetzt voraus, daß die q partiellen Differentialgleichungen (D) ein vollständiges (Jacobisches) System bilden; die Funktionen $\xi_{1,q+1}, \ldots, \xi_{qn}$ seien an der Stelle $x_1 = x_1^0, \ldots, x_n = x_n^0$ regulär. Dann besitzt das System (D) die an dieser Stelle regulären Lösungen $f_{q+1}, \ldots, f_n$, welche sich für $x_1 = x_1^0, \ldots, x_q = x_q^0$ bzw. auf $x_{q+1}, \ldots, x_n$ reduzieren. Auf Grund der Gleichungen (E) verschwinden die Differentiale von $f_{q+1}, \ldots, f_n$, so daß die Funktionen $f_{q+1}, \ldots, f_n$ konstante Werte annehmen:

$$\begin{gathered} f_{q+1}(x_1, \ldots, x_n) = C_{q+1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_n(x_1, \ldots, x_n) = C_n. \end{gathered}$$

Da für $x_1 = x_1^0, \ldots, x_q = x_q^0$ $f_{q+1} = x_{q+1}, \ldots, f_n = x_n$ ist, so nehmen die Funktionen $f_{q+1}, \ldots, f_n$ für $x_1 = x_1^0, \ldots, x_n = x_n^0$ bzw. die Werte $x_{q+1}^0, \ldots, x_n^0$ an. Also ist $C_{q+1} = x_{q+1}^0, \ldots, C_n = x_n^0$, und die totalen Differentialgleichungen (E) werden durch die Gleichungen

$$(34) \qquad \left\{ \begin{aligned} & f_{q+1}(x_1, \ldots, x_n) = x_{q+1}^0, \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & f_n(x_1, \ldots, x_n) = x_n^0 \end{aligned} \right.$$

befriedigt. Da die Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(f_{q+1}, \ldots, f_n)}{\partial(x_{q+1}, \ldots, x_n)}$$

für $x_1 = x_1^0, \ldots, x_n = x_n^0$ den Wert 1 annimmt, so lassen sich die Gleichungen (34) nach $x_{q+1}, \ldots, x_n$ auflösen; man erhält

$$(35) \qquad \left\{ \begin{aligned} & x_{q+1} = x_{q+1}^0 + \varphi_{q+1}(x_1 - x_1^0, \ldots, x_q - x_q^0), \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & x_n = x_n^0 + \varphi_n(x_1 - x_1^0, \ldots, x_q - x_q^0), \end{aligned} \right.$$

wo $\varphi_{q+1}, \ldots, \varphi_n$ Potenzreihen der beigefügten Argumente sind, welche für $x_1 = x_1^0, \ldots, x_q = x_q^0$ verschwinden. Das System totaler Differentialgleichungen (E) wird also durch Funktionen $x_{q+1}, \ldots, x_n$ von $x_1, \ldots, x_q$ befriedigt, welche für $x_1 = x_1^0, \ldots, x_q = x_q^0$ die beliebig vorgeschriebenen Werte $x_{q+1} = x_{q+1}^0, \ldots, x_n = x_n^0$ annehmen; dabei ist nur vorausgesetzt, daß die Funktionen $\xi_{1,q+1}, \ldots, \xi_{qn}$ an der Stelle $x_1 = x_1^0, \ldots, x_n = x_n^0$ regulär sind. Das System (E)

heißt dann **vollständig integrierbar** (unbeschränkt integrabel).

Wir nehmen umgekehrt an, das System (E) sei vollständig integrierbar, d. h. es werde durch Gleichungen von der Form (35) befriedigt, in welchen $x^0_{q+1}, \ldots, x^0_n$ als Integrationskonstante anzusehen sind. Dann wird das System partieller Differentialgleichungen (D) durch die Funktionen

$$\begin{aligned} f_{q+1} &= x_{q+1} - \varphi_{q+1}(x_1 - x_1^0, \ldots, x_q - x_q^0), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_n &= x_n - \varphi_n(x_1 - x_1^0, \ldots, x_q - x_q^0) \end{aligned}$$

befriedigt, welche für $x_1 = x_1^0, \ldots, x_q = x_q^0$ die Werte $f_{q+1} = x_{q+1}, \ldots, f_n = x_n$ annehmen und daher voneinander unabhängig sind. Dann bilden aber die partiellen Differentialgleichungen (D) ein q-gliedriges vollständiges System.

Wir können also den Satz aussprechen:

Das System totaler Differentialgleichungen (E) ist dann und nur dann vollständig integrierbar, wenn die partiellen Differentialgleichungen (D) ein q-gliedriges vollständiges System bilden, d. h. wenn (27)

$$X_i(\xi_{k\nu}) = X_k(\xi_{i\nu}) \qquad \begin{pmatrix} i, k = 1, \ldots, q, \\ \nu = q+1, \ldots, n \end{pmatrix}$$

ist. Sind

$$f_{q+1}(x_1, \ldots, x_n), \quad \ldots, \quad f_n(x_1, \ldots, x_n)$$

die dem System (D) genügenden, in der Umgebung von $x_1 = x_1^0, \ldots, x_n = x_n^0$ regulären Funktionen, welche sich für $x_1 = x_1^0, \ldots, x_q = x_q^0$ bzw. auf $x_{q+1}, \ldots, x_n$ reduzieren, so ergeben sich aus den Gleichungen (34)

$$\begin{aligned} f_{q+1}(x_1, \ldots, x_n) &= x^0_{q+1}, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ f_n(x_1, \ldots, x_n) &= x^0_n \end{aligned}$$

$x_{q+1}, \ldots, x_n$ **als Funktionen von** $x_1, \ldots, x_q$, **welche sich in der Umgebung von** $x_1^0, \ldots, x_q^0$ **regulär verhalten, für** $x_1 = x_1^0, \ldots, x_q = x_q^0$ **die Werte** $x_{q+1} = x^0_{q+1}, \ldots$

$\ldots, x_n = x_n^0$ annehmen und dem System totaler Differentialgleichungen (E) genügen.

Die Integration eines vollständig integrierbaren Systems totaler Differentialgleichungen und die Integration eines vollständigen Systems linearer partieller Differentialgleichungen (eines Jacobischen Systems) sind äquivalente Aufgaben. Demnach führt die in § 6 dargestellte Mayersche Methode auch zur Integration eines vollständig integrierbaren Systems (E).

II. Abschnitt.

Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen*).

§ 8. Existenz der Integrale.

Wir betrachten jetzt eine nicht lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung mit der abhängigen Veränderlichen z und zwei unabhängigen Veränderlichen x, y, d. h. eine Gleichung

$$\text{(A)} \qquad F(x, y, z, p, q) = 0,$$

wo

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}$$

ist.

Den in § 1 und § 2 bewiesenen Fundamentalsatz sprechen wir für den Fall zweier unabhängigen Veränderlichen noch einmal aus:

---

*) Zum eingehenderen Studium der Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit beliebig vielen unabhängigen Veränderlichen sei auf die folgenden Werke verwiesen:

Goursat, Vorlesungen über die partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Deutsch von Maser. Leipzig 1893.

Forsyth, Theory of differential equations. Vol. V. Cambridge 1906.

Mansion, Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Deutsch von Maser. Berlin 1892.

E. v. Weber, Vorlesungen über das Pfaffsche Problem und die Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Leipzig 1900.

Die analytische Funktion $F(x, y, z, p, q)$ **sei in der Umgebung der Stelle**

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0, \quad p = p_0, \quad q = q_0$$

regulär; an dieser Stelle sei $F = 0$, **aber** $\frac{\partial F}{\partial p}$ **von Null verschieden. Es sei eine in der Umgebung von** $y = y_0$ **reguläre Funktion** $\varphi(y)$ **gegeben, welche die Bedingungen**

$$\varphi(y_0) = z_0, \quad \varphi'(y_0) = q_0$$

erfüllt. Dann wird die partielle Differentialgleichung (A) durch eine einzige analytische Funktion $z = \Phi(x, y)$ **befriedigt, welche sich in der Umgebung der Stelle** $x = x_0$, $y = y_0$ **regulär verhält und für** $x = x_0$ **in die gegebene Funktion** $\varphi(y)$ **übergeht.**

Wir bringen die Gleichung (A) auf die Form

$$(1) \qquad p = f(x, y, z, q),$$

wo f eine analytische Funktion der beigefügten vier Argumente ist, welche an der Stelle $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, $q = q_0$ den Wert $p = p_0$ annimmt und in der Umgebung dieser Stelle regulär ist. Indem man die Gleichung (1) wiederholt nach y differentiiert, erhält man die Ableitungen $\frac{\partial^{1+\nu} z}{\partial x \partial y^\nu}$ durch die Ableitungen von z nach y ausgedrückt. Differentiiert man die Gleichung (1) einmal nach x und beliebig oft nach y, so werden die Ableitungen $\frac{\partial^{2+\nu} z}{\partial x^2 \partial y^\nu}$ durch die Ableitungen von z nach y ausgedrückt, nachdem für die Ableitungen $\frac{\partial^{1+\nu} z}{\partial x \partial y^\nu}$ die bereits gefundenen Ausdrücke eingesetzt sind, usw. Da z für $x = x_0$ in $\varphi(y)$ übergehen soll, muß

$$\left(\frac{\partial^\nu z}{\partial y^\nu}\right)_{x_0, y_0} = \left(\frac{d^\nu \varphi(y)}{d y^\nu}\right)_{y_0}$$

sein; man kann schrittweise sämtliche Ableitungen

$$\left(\frac{\partial^{\mu+\nu} z}{\partial x^\mu \partial y^\nu}\right)_{x_0, y_0}$$

berechnen und die in der Umgebung der Stelle $x = x_0$, $y = y_0$ konvergente Potenzreihe

$$z = \Phi(x, y) = \sum_{\mu, \nu} \frac{1}{\mu! \nu!} \left(\frac{\partial^{\mu+\nu} z}{\partial x^\mu \partial y^\nu} \right)_{x_0, y_0} (x - x_0)^\mu (y - y_0)^\nu$$

aufstellen.

Wir werfen die Frage auf, ob sich jede der Differentialgleichung (A) genügende analytische Funktion $z = \Phi(x, y)$ durch das soeben dargestellte Verfahren herleiten läßt.

Es werde die Bezeichnung benutzt:

$$(2) \quad X = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial F}{\partial z}, \quad P = \frac{\partial F}{\partial p}, \quad Q = \frac{\partial F}{\partial q}.$$

Wir nehmen an, die Funktion $z = \Phi(x, y)$ erfülle die Gleichung $P = 0$ nicht identisch; $\Phi(x, y)$ sei in der Umgebung der Stelle $x = x_0$, $y = y_0$ regulär; wenn z_0, p_0, q_0 die Werte sind, welche die Funktionen

$$z = \Phi(x, y), \quad p = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

für $x = x_0$, $y = y_0$ annehmen, sei P für das Wertsystem

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0, \quad p = p_0, \quad q = q_0$$

von Null verschieden. Dann ist eine und nur eine analytische Funktion z von x, y vorhanden, welche sich in der Umgebung der Stelle $x = x_0$, $y = y_0$ regulär verhält und sich für $x = x_0$ auf die Funktion

$$\varphi(y) = \Phi(x_0, y)$$

reduziert. Diese Funktion z muß mit $\Phi(x, y)$ übereinstimmen.

Wenn die Funktion $z = \Phi(x, y)$ zwar der Gleichung $P = 0$ genügt, aber die Gleichung $Q = 0$ nicht identisch erfüllt, so bleibt die bisherige Betrachtung anwendbar, wenn man nur der Veränderlichen x diejenige Rolle zuweist, welche bisher y spielte.

Die Lösung $z = \Phi(x, y)$ kann nur dann auf dem oben beschriebenen Wege nicht erhalten werden, wenn sie den beiden Gleichungen

$$P = 0, \quad Q = 0$$

gleichzeitig genügt. Eine Lösung der Gleichung (A) genügt auch den Gleichungen, welche man erhält, wenn man die Gleichung (A) partiell nach x bzw. y differentiiert und dabei beachtet, daß z, p, q von x und y abhängen:

$$X + Zp + P\frac{\partial p}{\partial x} + Q\frac{\partial q}{\partial x} = 0\,,$$

$$Y + Zq + P\frac{\partial p}{\partial y} + Q\frac{\partial q}{\partial y} = 0\,.$$

Für eine Lösung, welche die Gleichungen $P = 0$, $Q = 0$ befriedigt, reduzieren sich die beiden letzten Gleichungen auf

$$X + Zp = 0\,,$$
$$Y + Zq = 0\,.$$

Eine Lösung der partiellen Differentialgleichung (A), welche zugleich den Gleichungen

(3) $\quad P = 0\,,\quad Q = 0\,,\quad X + pZ = 0\,,\quad Y + qZ = 0$

genügt, wird eine singuläre Lösung genannt. Jede analytische Lösung von (A), welche nicht in diesem Sinne singulär ist, kann durch das oben entwickelte Verfahren erhalten werden.

Im allgemeinen ist keine Funktion z von x, y vorhanden, welche außer der Gleichung (A) auch den vier Gleichungen (3) genügt. Eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung besitzt im allgemeinen keine singuläre Lösung.

§ 9. Integralfläche, welche durch eine gegebene Kurve geht.

Wir benutzen eine geometrische Ausdrucksweise, indem wir x, y, z als rechtwinklige Koordinaten eines Punktes im Raume auffassen, wodurch komplexe Werte von x, y, z nicht ausgeschlossen sind. Ist

(4) $$z = \varphi(x, y)$$

eine der Differentialgleichung (A) genügende Funktion, so stellt die Gleichung (4) eine Integralfläche der partiellen Differentialgleichung (A) dar.

Unter einem **Flächenelement** im Raume verstehen wir den Inbegriff eines Punktes und einer durch den Punkt gehenden Ebene. Da es im Raume ∞^3 Punkte gibt und durch jeden Punkt ∞^2 Ebenen gehen, so sind ∞^5 Flächenelemente im Raume vorhanden. Die Gleichung einer Ebene, welche durch den Punkt (x, y, z) geht, schreiben wir, indem wir die laufenden Koordinaten ξ, η, ζ benutzen, in der Form

$$\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y),$$

so daß die Stellungskosinus der Ebene den Größen $p, q, -1$ proportional sind. Die Stellung der Ebene ist also durch die Größen p, q bestimmt. Die fünf Größen x, y, z, p, q werden die Koordinaten des Flächenelementes genannt, welches aus dem Punkt (x, y, z) und der angegebenen Ebene besteht.

Die Fläche $z = \Phi(x, y)$ enthält ∞^2 Punkte (x, y, z); jedem dieser Punkte ordnen wir die Tangentialebene zu, so daß

$$p = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

ist. Einer Fläche gehören demnach ∞^2 Flächenelemente an. Die Fläche $z = \Phi(x, y)$ ist eine Integralfläche der partiellen Differentialgleichung (A), wenn ihre sämtlichen Elemente (x, y, z, p, q) der Gleichung (A) genügen.

Erfüllt die Funktion $z = \Phi(x, y)$ die Anfangsbedingung

(5) $$x = x_0, \quad z = \varphi(y),$$

so geht die Integralfläche (4) durch die Kurve (5). Die analytische Funktion $\varphi(y)$ sei wie in § 8 an der Stelle $y = y_0$ regulär und es sei $z_0 = \varphi(y_0)$, $q_0 = \varphi'(y_0)$, während p_0 der Gleichung $F(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) = 0$ genüge; an der Stelle $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, $p = p_0$, $q = q_0$ sei die Funktion $F(x, y, z, p, q)$ regulär und P von Null verschieden. Dann geht nach dem in § 8 ausgesprochenen Satze durch die Kurve (5) eine und nur eine Integralfläche $z = \Phi(x, y)$, wo $\Phi(x, y)$ eine in der Umgebung der Stelle $x = x_0$, $y = y_0$ reguläre analytische Funktion ist.

Bisher lag die gegebene Kurve (5) in einer zur yz-Ebene parallelen Ebene. Es bleibt noch zu untersuchen,

ob durch eine beliebige analytische Kurve eine und nur eine analytische Integralfläche hindurchgeht.

Es sei eine Kurve C dargestellt durch die Gleichungen

(6) $$x = f_1(u)\,, \quad y = f_2(u)\,, \quad z = f_3(u)\,,$$

wo f_1, f_2, f_3 analytische Funktionen von u sind, welche sich in der Umgebung von $u = u_0$ regulär verhalten und für $u = u_0$ die Werte x_0, y_0, z_0 annehmen, während $f_1'(u_0)$, $f_2'(u_0)$, $f_3'(u_0)$ nicht sämtlich verschwinden. Ist $f_1'(u_0)$ von Null verschieden, so lassen sich die Gleichungen (6) durch Elimination von u auf die Form

(7) $$y = f(x)\,, \quad z = g(x)$$

bringen, wo sich $f(x)$, $g(x)$ in der Umgebung von $x = x_0$ regulär verhalten und für $x = x_0$ die Werte $y = y_0$, $z = z_0$ annehmen.

Für eine durch die Kurve C gehende Integralfläche

$$z = \Phi(x, y)$$

sei

$$p = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\,, \quad q = \frac{\partial \Phi}{\partial y}\,,$$

$$r = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\,, \quad s = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\, \partial y}\,, \quad t = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}\,.$$

Um die Werte von p, q in einem beliebigen Punkt der Kurve C zu berechnen, haben wir die Gleichungen

(8) $$\begin{cases} F(x, y, z, p, q) = 0\,, \\ p\,dx + q\,dy - dz = 0\,, \end{cases}$$

wo für x, y, z die Funktionen (6) von u zu setzen sind. Die in bezug auf p, q gebildete Funktionaldeterminante der linken Seiten dieser beiden Gleichungen ist

(9) $$\Delta = \begin{vmatrix} P, & Q \\ dx, & dy \end{vmatrix} = P\,dy - Q\,dx\,.$$

Wir nehmen an, für ein den Gleichungen (8) genügendes Wertsystem p, q verschwinde Δ nicht identisch in u. Die Werte von r, s, t in einem Punkt der Kurve C genügen den Gleichungen

$$dp = r\,dx + s\,dy\,, \quad dq = s\,dx + t\,dy$$

und den Gleichungen

$$X + Zp + Pr + Qs = 0\,,$$
$$Y + Zq + Ps + Qt = 0\,,$$

welche man erhält, indem man die Gleichung (A) partiell nach x bzw. nach y differentiiert. Wenn man die beiden letzten Gleichungen mit dx bzw. dy multipliziert und addiert, erhält man die Gleichung

$$X\,dx + Y\,dy + Z(p\,dx + q\,dy) + P(r\,dx + s\,dy) \\ + Q(s\,dx + t\,dy) = 0$$

oder

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz + P\,dp + Q\,dq = 0\,,$$

d. h.

$$dF(x, y, z, p, q) = 0\,.$$

Unter den obigen vier Gleichungen finden sich also nur die drei unabhängigen

$$(10) \qquad \begin{cases} r\,dx + s\,dy = dp\,, \\ \qquad s\,dx + t\,dy = dq\,, \\ rP + sQ = -X - pZ\,, \end{cases}$$

aus welchen sich bestimmte Werte von r, s, t ergeben, da die Determinante

$$\begin{vmatrix} dx, & dy, & 0 \\ 0, & dx, & dy \\ P, & Q, & 0 \end{vmatrix} = A\,dy$$

von Null verschieden ist*). Fährt man so fort, so findet man für alle partiellen Ableitungen von z nach x und y bestimmte endliche Werte.

Es fragt sich, ob die Reihe

$$z = z_0 + p_0(x - x_0) + q_0(y - y_0) + \tfrac{1}{2}\,r_0(x - x_0)^2 + \ldots$$

in der Umgebung der Stelle $x = x_0$, $y = y_0$ konvergiert; dabei ist (x_0, y_0, z_0) ein Punkt der Kurve C, und p_0, q_0, r_0, ... sind die zugehörigen Werte der partiellen Ableitungen der Funktion z von x und y.

*) Ist längs der gegebenen Kurve y konstant, so kommt man durch Vertauschung von x und y auf den bereits erledigten Fall; wir können also dy von Null verschieden voraussetzen.

Die Gleichungen der Kurve C seien auf die Form (7) gebracht; A sei für $x = x_0$ von Null verschieden. Wir wenden die Substitution

$$\mathfrak{x} = x\,, \quad \mathfrak{y} = y - f(x)\,, \quad \mathfrak{z} = z - g(x)$$

an und setzen

$$\mathfrak{p} = \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial \mathfrak{x}}\,, \quad \mathfrak{q} = \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial \mathfrak{y}}\,.$$

Die Gleichung

$$d\mathfrak{z} = \mathfrak{p}\,d\mathfrak{x} + \mathfrak{q}\,d\mathfrak{y}$$

geht, wenn man $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ durch x, y, z ausdruckt, über in

$$dz - g'(x)\,dx = \mathfrak{p}\,dx + \mathfrak{q}(dy - f'(x)\,dx)$$

oder

$$dz = (\mathfrak{p} - \mathfrak{q}\,f'(x) + g'(x))\,dx + \mathfrak{q}\,dy\,;$$

daraus folgt

$$p = \mathfrak{p} - \mathfrak{q}\,f'(x) + g'(x)\,,$$
$$q = \mathfrak{q}$$

oder

$$\mathfrak{p} = p + q\,f'(x) - g'(x)\,,$$
$$\mathfrak{q} = q\,.$$

Die Differentialgleichung (A) geht durch Einführung von $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ über in

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}) = 0\,,$$

während die Kurve C die Gleichungen $\mathfrak{y} = 0$, $\mathfrak{z} = 0$ erhält. Wir haben eine Funktion $\mathfrak{z}$ von $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ zu suchen, welche der Differentialgleichung $\mathfrak{F} = 0$ genügt und für $\mathfrak{y} = 0$ den Wert $\mathfrak{z} = 0$ annimmt.

Aus den obigen Ausdrücken von p, q durch $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ folgt

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{p}} = \frac{\partial F}{\partial p}\,,$$
$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{q}} = \frac{\partial F}{\partial q} - \frac{\partial F}{\partial p}\,f'(x)\,;$$

da

$$d\mathfrak{x} = dx\,, \quad d\mathfrak{y} = dy - f'(x)\,dx$$

ist, so ist

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{p}} d\mathfrak{y} - \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{q}} d\mathfrak{x} = \frac{\partial F}{\partial p} dy - \frac{\partial F}{\partial q} dx = \Delta .$$

Längs der Kurve C, der $\mathfrak{x}$-Achse, ist $\mathfrak{y} = 0$, also $d\mathfrak{y} = 0$ und

$$\Delta = -\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{q}} d\mathfrak{x} .$$

Nun ist aber Δ, also auch $\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{q}}$, von Null verschieden, so daß sich die Gleichung $\mathfrak{F} = 0$ nach $\mathfrak{q}$ auflösen läßt. Nach dem in § 8 ausgesprochenen Satze besitzt die Gleichung $\mathfrak{F} = 0$ eine in der Umgebung der Stelle $\mathfrak{x} = x_0$, $\mathfrak{y} = 0$ reguläre Lösung $\mathfrak{z}$, welche für $\mathfrak{y} = 0$ den Wert $\mathfrak{z} = 0$ annimmt.

§ 10. Die Charakteristiken einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung.

Die durch die Gleichungen

$$(11) \qquad x = f_1(u), \quad y = f_2(u), \quad z = f_3(u), \quad p = f_4(u), \quad q = f_5(u)$$

mit dem veränderlichen Parameter u dargestellte einfache Mannigfaltigkeit von Flächenelementen (x, y, z, p, q) wird als Streifen bezeichnet, wenn sie der Gleichung

$$(12) \qquad dz = p\,dx + q\,dy$$

genügt. Wenn x, y, z nicht sämtlich von u unabhängig sind, stellen die drei Gleichungen

$$x = f_1(u), \quad y = f_2(u), \quad z = f_3(u)$$

eine Kurve dar, deren Tangente im Punkt (x, y, z) in der Ebene

$$\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y)$$

liegt*).

Gehört der Streifen (11) einer Integralfläche der partiellen Differentialgleichung (A) an, so ist infolge von (11) außer der Gleichung (12) auch die Gleichung (A) erfüllt.

*) Sind $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ von u unabhängig, so stellen die Gleichungen (11) ∞^1 Flächenelemente dar, welche durch den Punkt (x_0, y_0, z_0) gehen und einen „Elementarkegel" bestimmen.

Wir haben gesehen, daß durch einen solchen Streifen eine Integralfläche vollständig bestimmt ist, falls

$$P\,dy - Q\,dx$$

von Null verschieden ist. Wenn es also eine Kurve gibt, längs welcher sich mehrere Integralflächen berühren, oder mit anderen Worten, wenn es einen Streifen gibt, welcher mehreren Integralflächen gemein ist, so muß dieser Streifen außer den Gleichungen (A) und (12) der Gleichung

$$(13) \qquad P\,dy - Q\,dx = 0$$

genügen.

Ein Streifen, welcher die Gleichung (13) befriedigt und einer Integralfläche von (A) angehört (die sich in der Nähe der Punkte des Streifens regulär verhält)*), wird **charakteristischer Streifen** oder **Charakteristik** genannt.

Längs einer Charakteristik gelten die Gleichungen (12) und (13), sowie die Gleichungen, welche man erhält, indem man die Gleichung $F = 0$ partiell nach x bzw. y differentiiert. Die letzteren Gleichungen lauten, wenn man

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

setzt,

$$X + pZ + rP + sQ = 0,$$
$$Y + qZ + sP + tQ = 0.$$

Ferner ist

$$dp = r\,dx + s\,dy,$$
$$dq = s\,dx + t\,dy$$

oder, wenn man die Gleichung (13) unter Einführung einer Hilfsveränderlichen u durch die beiden Gleichungen

$$dx = P\,du, \quad dy = Q\,du$$

ersetzt,

$$dp = (rP + sQ)\,du,$$
$$dq = (sP + tQ)\,du$$

*) Ein Punkt (x_0, y_0, z_0) der Fläche $f(x, y, z) = 0$ heißt regulär, wenn sich für die benachbarten Flächenpunkte (x, y, z) eine der drei Differenzen $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$ (wir nehmen an, die dritte) als Potenzreihe der beiden anderen darstellen läßt.

oder

$$(14)\qquad \begin{cases} dp = -(X + pZ)\,du\,, \\ dq = -(Y + qZ)\,du\,. \end{cases}$$

Längs einer Charakteristik gelten also die Gleichungen

$$(15)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{du} = P\,, \\[2mm] \dfrac{dy}{du} = Q\,, \\[2mm] \dfrac{dz}{du} = pP + qQ\,, \\[2mm] \dfrac{dp}{du} = -(X + pZ)\,, \\[2mm] \dfrac{dq}{du} = -(Y + qZ) \end{cases}$$

oder

$$(16)\qquad \frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{pP + qQ} = -\frac{dp}{X + pZ} = -\frac{dq}{Y + qZ}\,.$$

Ein Wertsystem

$$x = x_0\,,\quad y = y_0\,,\quad z = z_0\,,\quad p = p_0\,,\quad q = q_0\,,$$

welches nicht nur der Gleichung $F = 0$, sondern auch den Gleichungen (3)

$$P = 0\,,\quad Q = 0\,,\quad X + pZ = 0\,,\quad Y + qZ = 0$$

genügt, für welches also die rechten Seiten der Gleichungen (15) sämtlich verschwinden, stellt in bezug auf die Differentialgleichungen (15) oder (16) ein singuläres Wertsystem dar; demgemäß wird das Flächenelement $(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)$ als **singuläres Flächenelement** bezeichnet. Ein singuläres Integral der Differentialgleichung (A) besteht demnach aus lauter singulären Flächenelementen.

Ist $(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)$ ein nicht singuläres Flächenelement, welches der Gleichung $F = 0$ genügt, so be-

sitzen die Differentialgleichungen (15) eine und nur eine Lösung

$$
(17)\qquad \left\{\begin{aligned}
x &= \varphi_1(u, x_0, y_0, z_0, p_0, q_0),\\
y &= \varphi_2(u, x_0, y_0, z_0, p_0, q_0),\\
z &= \varphi_3(u, x_0, y_0, z_0, p_0, q_0),\\
p &= \varphi_4(u, x_0, y_0, z_0, p_0, q_0),\\
q &= \varphi_5(u, x_0, y_0, z_0, p_0, q_0),
\end{aligned}\right.
$$

welche die Anfangsbedingungen

$$x = x_0,\quad y = y_0,\quad z = z_0,\quad p = p_0,\quad q = q_0$$

für $u = 0$ erfüllt*). Die Funktionen $\varphi_1, \ldots, \varphi_5$ sind in der Umgebung von $u = 0$ regulär und reduzieren sich für $u = 0$ bzw. auf $x_0, \ldots, q_0$; sie sind analytische Funktionen von $u, x_0, y_0, z_0, p_0, q_0$, welche in der Umgebung der Werte $u = 0$, $x_0 = \mathfrak{x}_0, y_0 = \mathfrak{y}_0, z_0 = \mathfrak{z}_0, p_0 = \mathfrak{p}_0, q_0 = \mathfrak{q}_0$ regulär sind, wenn unter $(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{y}_0, \mathfrak{z}_0, \mathfrak{p}_0, \mathfrak{q}_0)$ ein der Gleichung $F = 0$ genügendes nicht singuläres Flächenelement verstanden wird**).

Versteht man unter $x_0, \ldots, q_0$ feste Werte, so stellen die drei ersten Gleichungen (17) im allgemeinen eine Kurve dar; durch die beiden letzten Gleichungen (17) wird jedem Punkt (x, y, z) dieser charakteristischen Kurve ein Flächenelement (x, y, z, p, q) zugeordnet; die ∞^1 Flächenelemente, welche durch die Gleichungen (17) dargestellt werden, bilden einen charakteristischen Streifen.

Von jedem nicht singulären Flächenelement $(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)$, welches der Gleichung $F = 0$ genügt, geht eine und nur eine Charakteristik aus.

Die Differentialgleichungen (15) besitzen das Integral

$$F(x, y, z, p, q) = \text{konst.},$$

denn es ist

$$
\begin{aligned}
\frac{dF}{du} &= X\frac{dx}{du} + Y\frac{dy}{du} + Z\frac{dz}{du} + P\frac{dp}{du} + Q\frac{dq}{du}\\
&= XP + YQ + Z(pP + qQ)\\
&\qquad - P(X + pZ) - Q(Y + qZ) = 0\,.
\end{aligned}
$$

*) Wäre das Flächenelement $(x_0, \ldots, q_0)$ singulär, so würden sämtliche Ableitungen von $x, \ldots, q$ nach u zufolge (15) für $u = 0$ verschwinden; demnach wären die Ausdrücke (17) von u unabhängig.

**) Vgl. „Gewöhnl. Differentialgl.", § 5.

Genügen also die zu $u = 0$ gehörigen Werte $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, $p = p_0$, $q = q_0$ der Bedingung

$$F(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) = 0,$$

so ist längs des ganzen von dem Flächenelement $(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)$ ausgehenden charakteristischen Streifens

$$F(x, y, z, p, q) = 0.$$

In den Gleichungen eines charakteristischen Streifens sind die zum Wert $x = x_0$ gehörigen Werte y_0, z_0, p_0, q_0, zwischen welchen die Gleichung $F(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) = 0$ besteht, als willkürliche Konstante anzusehen. Demnach sind drei willkürliche Konstante vorhanden, so daß die Gleichungen (17) ∞^3 charakteristische Streifen darstellen. Im allgemeinen hängen auch die Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ von drei willkürlichen Konstanten ab, so daß durch die drei ersten Gleichungen (17) ∞^3 charakteristische Kurven dargestellt werden und jeder charakteristischen Kurve ein einziger charakteristischer Streifen entspricht.

§ 11. Integration der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung vermittels der Charakteristiken*).

Die Gleichungen

$$(18) \qquad \begin{cases} x_0 = f_1(v), \quad y_0 = f_2(v), \quad z_0 = f_3(v), \\ \quad p_0 = f_4(v), \quad q_0 = f_5(v) \end{cases}$$

mit dem veränderlichen Parameter v stellen einen Streifen von Flächenelementen $(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)$ dar, wenn vermöge (18)

$$d z_0 = p_0 \, d x_0 + q_0 \, d y_0$$

ist. Der Streifen möge überdies der Gleichung

$$F(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) = 0$$

genügen. Jedes Flächenelement (x, y, z, p, q) der von dem Element $(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)$ ausgehenden Charakteristik (17) genügt dann der Gleichung

$$F(x, y, z, p, q) = 0.$$

*) Integrationsmethode von Cauchy.

Die Gleichungen

$$(19)\qquad \begin{cases} x = \varphi_1(u\,,\,f_1(v)\,,\,\ldots\,,\,f_5(v))\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ q = \varphi_5(u\,,\,f_1(v)\,,\,\ldots\,,\,f_5(v)) \end{cases}$$

stellen eine Mannigfaltigkeit von Flächenelementen $(x\,,\,y\,,\,z\,,\,p\,,\,q)$ dar, welche sämtlich der Gleichung

$$F(x\,,\,y\,,\,z\,,\,p\,,\,q) = 0$$

genügen. Die Mannigfaltigkeit (19) ist dann und nur dann zweifach, wenn von den aus dem Schema

$$\left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}\,, & \dfrac{\partial y}{\partial u}\,, & \dfrac{\partial z}{\partial u}\,, & \dfrac{\partial p}{\partial u}\,, & \dfrac{\partial q}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v}\,, & \dfrac{\partial y}{\partial v}\,, & \dfrac{\partial z}{\partial v}\,, & \dfrac{\partial p}{\partial v}\,, & \dfrac{\partial q}{\partial v} \end{matrix} \right\|$$

gebildeten Determinanten zweiten Grades mindestens eine nicht identisch in u und v verschwindet. Auf Grund der Differentialgleichungen (15) ist

$$\frac{\partial x}{\partial u} = P\,, \qquad \frac{\partial y}{\partial u} = Q\,, \qquad \frac{\partial z}{\partial u} = pP + qQ\,,$$

$$\frac{\partial p}{\partial u} = -(X + pZ)\,, \qquad \frac{\partial q}{\partial u} = -(Y + qZ)\,;$$

also hat man für $u = 0$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = P_0\,, \qquad \frac{\partial y}{\partial u} = Q_0\,, \qquad \frac{\partial z}{\partial u} = p_0 P_0 + q_0 Q_0\,,$$

$$\frac{\partial p}{\partial u} = -(X_0 + p_0 Z_0)\,, \qquad \frac{\partial q}{\partial u} = -(Y_0 + q_0 Z_0)\,,$$

wo unter $X_0\,,\,Y_0\,,\,Z_0\,,\,P_0\,,\,Q_0$ die Werte von $X\,,\,Y\,,\,Z\,,\,P\,,\,Q$ für $x = x_0\,,\; y = y_0\,,\; z = z_0\,,\; p = p_0\,,\; q = q_0$ verstanden sind. Für $u = 0$ reduzieren sich $x\,,\,y\,,\,z\,,\,p\,,\,q$ auf $x_0\,,\,y_0\,,\,z_0\,,\,p_0\,,\,q_0$, so daß man hat:

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{d x_0}{d v}\,, \quad \ldots\,, \quad \frac{\partial q}{\partial v} = \frac{d q_0}{d v}\,.$$

Die Gleichungen (19) stellen also sicher dann ∞^2 Flächenelemente dar, wenn von den aus dem Schema

$$\left\| \begin{array}{ccccc} \frac{dx_0}{dv}, & \frac{dy_0}{dv}, & \frac{dz_0}{dv}, & \frac{dp_0}{dv}, & \frac{dq_0}{dv}, \\ P_0, & Q_0, & p_0P_0+q_0Q_0, & -(X_0+p_0Z_0), & -(Y_0+q_0Z_0) \end{array} \right\|$$

gebildeten Determinanten zweiten Grades mindestens eine nicht identisch in v verschwindet, mit anderen Worten, wenn nicht sämtliche Gleichungen

$$\frac{dx_0}{P_0} = \frac{dy_0}{Q_0} = \frac{dz_0}{p_0P_0+q_0Q_0} = -\frac{dp_0}{X_0+p_0Z_0} = -\frac{dq_0}{Y_0+q_0Z_0}$$

bestehen, d. h. wenn die Gleichungen (18) keine Charakteristik der partiellen Differentialgleichung (A) darstellen.

Sind (18) die Gleichungen eines charakteristischen Streifens, so fällt die von einem Element $(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)$ dieses Streifens ausgehende Charakteristik mit dem Streifen (18) zusammen, so daß die Gleichungen (19) nur ∞^1 Flächenelemente darstellen.

Machen wir die Voraussetzung, daß der Ausdruck

$$P_0\frac{dy_0}{dv} - Q_0\frac{dx_0}{dv}$$

für die Werte (18) nicht identisch verschwindet*), so stellen die drei ersten Gleichungen (19) eine Fläche dar. Ist der Ausdruck

$$P_0\frac{dy_0}{dv} - Q_0\frac{dx_0}{dv} = \begin{vmatrix} P_0, & Q_0 \\ \frac{dx_0}{dv}, & \frac{dy_0}{dv} \end{vmatrix},$$

welcher den Wert der Funktionaldeterminante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}, & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v}, & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

*) Unter dieser Voraussetzung ist die Existenz einer durch die Kurve $x_0 = f_1(v)$, $y_0 = f_2(v)$, $z_0 = f_3(v)$ gehenden Integralfläche in § 9 bewiesen. Vgl. die unten behandelten Fälle, in welchen diese Voraussetzung nicht erfüllt ist (Integralfläche, welche durch eine Integralkurve geht; Integralkonoid).

für $u = 0$ darstellt, für $v = \lambda$ von Null verschieden, so lassen sich vermittels der beiden ersten Gleichungen (19) u und v als Funktionen von x, y darstellen, welche in der Umgebung von $x = \xi_0 = f_1(\lambda)$, $y = \eta_0 = f_2(\lambda)$ regulär sind*). Setzt man diese Funktionen in die dritte Gleichung (19) ein, so erhält man die Gleichung

$$z = \Phi(x, y),$$

wo $\Phi(x, y)$ eine in der Umgebung von $x = \xi_0$, $y = \eta_0$ reguläre Funktion darstellt.

Daß alle durch die Gleichungen (19) dargestellten Flächenelemente (x, y, z, p, q) die Gleichung (A) erfüllen, steht bereits fest; wir zeigen, daß auf Grund der Gleichungen (19) die Gleichung

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

besteht, welche in die beiden Gleichungen

$$\frac{\partial z}{\partial u} = p\frac{\partial x}{\partial u} + q\frac{\partial y}{\partial u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = p\frac{\partial x}{\partial v} + q\frac{\partial y}{\partial v}$$

zerfällt.

Nehmen wir diesen Nachweis einstweilen als geführt an, so liegen folgende Möglichkeiten vor.

Wenn die durch die Gleichungen (19) dargestellten Flächenelemente (x, y, z, p, q) einer Fläche $z = \Phi(x, y)$ angehören, so ist

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y},$$

und es besteht die Gleichung

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0,$$

d. h. die Fläche $z = \Phi(x, y)$ ist eine Integralfläche von (A).

Entstehen durch Elimination von u, v aus den drei ersten Gleichungen (19) zwei Gleichungen zwischen x, y, z,

*) Die Funktionen x, y von u, v nehmen für $u = 0$ die Werte $f_1(v)$, $f_2(v)$, also für $u = 0$, $v = \lambda$ die Werte $f_1(\lambda)$, $f_2(\lambda)$ an.

welche eine Kurve C darstellen, so werden durch die sämtlichen Gleichungen (19) immer noch ∞^2 Flächenelemente (x, y, z, p, q) dargestellt; die Gleichung

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

sagt aus, daß die Ebene

$$\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y)$$

die Tangente der Kurve C enthält, so daß jedes durch (19) dargestellte Element aus einem Punkt der Kurve C und einer durch die Tangente der Kurve in diesem Punkt gehenden Ebene besteht.

Ergeben sich aus den drei ersten Gleichungen (19) drei Relationen zwischen x, y, z, so haben wir konstante Werte

$$x = x_0\,, \qquad y = y_0\,, \qquad z = z_0\,,$$

so daß die Relation

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

durch alle Werte von p, q erfüllt ist. Die durch die Gleichungen (19) dargestellten ∞^2 Elemente bestehen aus dem Punkt (x_0, y_0, z_0) und einer beliebigen durch ihn gehenden Ebene.

Wir verstehen mit Lie unter einem Integral der partiellen Differentialgleichung (A) jede zweifache Mannigfaltigkeit von Flächenelementen (x, y, z, p, q), welche der Gleichung (A) und der Relation

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

genügen. Durch diese Verallgemeinerung des Integralbegriffs werden die zuletzt erwähnten Ausnahmefälle in die Theorie einbezogen*).

Der versprochene Nachweis kann folgendermaßen geführt werden. Da die Gleichungen (19), wenn man v als

*) Wir werden uns allerdings künftig wieder auf Integralflächen beschränken, indem wir in betreff der Lieschen Auffassung der Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen auf den dritten Abschnitt des Werkes verweisen: Lie-Scheffers. Geometrie der Berührungstransformationen, Leipzig 1896.

konstant ansieht, eine Charakteristik darstellen, so ist nach (15)

$$\frac{\partial x}{\partial u} = P, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = Q, \quad \frac{\partial z}{\partial u} = pP + qQ,$$

also

$$\frac{\partial z}{\partial u} = p\frac{\partial x}{\partial u} + q\frac{\partial y}{\partial u}. \tag{20}$$

Um nachzuweisen, daß die Gleichungen (19) ein Integral der partiellen Differentialgleichung (A) darstellen, haben wir nur noch zu zeigen, daß

$$\frac{\partial z}{\partial v} = p\frac{\partial x}{\partial v} + q\frac{\partial y}{\partial v} \tag{21}$$

ist oder daß der Ausdruck

$$V = \frac{\partial z}{\partial v} - p\frac{\partial x}{\partial v} - q\frac{\partial y}{\partial v}$$

verschwindet.

Es ist

$$\frac{\partial V}{\partial u} = \frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} - p\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} - q\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v} - \frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial q}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}$$

oder, weil

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} = \frac{\partial p}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial q}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} + p\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} + q\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v}$$

ist,

$$\frac{\partial V}{\partial u} = \frac{\partial p}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial q}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} - \frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial q}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v};$$

mit Rücksicht auf die Differentialgleichungen (15) hat man

$$\frac{\partial V}{\partial u} = P\frac{\partial p}{\partial v} + Q\frac{\partial q}{\partial v} + (X + pZ)\frac{\partial x}{\partial v} + (Y + qZ)\frac{\partial y}{\partial v}$$

$$= X\frac{\partial x}{\partial v} + Y\frac{\partial y}{\partial v} + P\frac{\partial p}{\partial v} + Q\frac{\partial q}{\partial v}$$

$$+ Z\left(p\frac{\partial x}{\partial v} + q\frac{\partial y}{\partial v}\right).$$

Die Differentiation der Gleichung $F(x, y, z, p, q) = 0$ nach v ergibt

$$X\frac{\partial x}{\partial v} + Y\frac{\partial y}{\partial v} + P\frac{\partial p}{\partial v} + Q\frac{\partial q}{\partial v} = -Z\frac{\partial z}{\partial v};$$

also ist

$$\frac{\partial V}{\partial u} = -Z\left(\frac{\partial z}{\partial v} - p\frac{\partial x}{\partial v} - q\frac{\partial y}{\partial v}\right)$$

oder

$$\frac{\partial V}{\partial u} = -ZV.$$

Integriert man bei konstantem v nach u, so erhält man

$$V = V_0 e^{-\int_0^u Z\,du},$$

wenn

$$V_0 = \frac{dz_0}{dv} - p_0\frac{dx_0}{dv} - q_0\frac{dy_0}{dv}$$

den zu $u = 0$ gehörigen Wert von V darstellt. Da der Streifen (18) die Bedingung $V_0 = 0$ erfüllt, so ist auch $V = 0$, w. z. b. w.

Wir haben demnach den Satz:

Es sei ein Streifen

$$x_0 = f_1(v), \quad y_0 = f_2(v), \quad z_0 = f_3(v), \quad p_0 = f_4(v), \quad q_0 = f_5(v)$$

gegeben, welcher nicht nur die Bedingung

$$dz_0 = p_0\,dx_0 + q_0\,dy_0$$

erfüllt, sondern auch der Gleichung

$$F(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) = 0$$

genügt, aber kein charakteristischer Streifen von (A) ist. Dann bilden die von den Flächenelementen $(x_0, \ldots, q_0)$ des Streifens ausgehenden Charakteristiken ein Integral der partiellen Differentialgleichung (A) mit den Gleichungen

$$\begin{aligned}
x &= \varphi_1(u, f_1(v), \ldots, f_5(v)), \\
y &= \varphi_2(u, f_1(v), \ldots, f_5(v)), \\
z &= \varphi_3(u, f_1(v), \ldots, f_5(v)), \\
p &= \varphi_4(u, f_1(v), \ldots, f_5(v)), \\
q &= \varphi_5(u, f_1(v), \ldots, f_5(v)).
\end{aligned}$$

Demnach ist die Integration der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung (A) auf die Integration des Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen (15) oder (16) zurückgeführt.

Wir können nun auch die **Integralfläche bestimmen, welche durch eine gegebene Kurve geht.**

Die Gleichungen der Kurve seien

$$x_0 = f_1(v)\,, \quad y_0 = f_2(v)\,, \quad z_0 = f_3(v)\,; \tag{22}$$

unter f_1, f_2, f_3 sind analytische Funktionen von v verstanden, welche sich in der Umgebung von $v = \lambda$ regulär verhalten. Aus den Gleichungen

$$\left\{\begin{aligned} &F(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) = 0\,,\\ &\frac{dz_0}{dv} = p_0\frac{dx_0}{dv} + q_0\frac{dy_0}{dv} \end{aligned}\right. \tag{23}$$

berechnen sich die in der Umgebung von $v = \lambda$ regulären Funktionen

$$p_0 = f_4(v)\,, \quad q_0 = f_5(v)\,,$$

vorausgesetzt, daß sich für $v = \lambda$ aus den Gleichungen (23) Werte $p_0 = f_4(\lambda)$, $q_0 = f_5(\lambda)$ ergeben, für welche die Determinante

$$P_0\frac{dy_0}{dv} - Q_0\frac{dx_0}{dv}$$

von Null verschieden ist*). Wir haben so längs der Kurve (22) den der Gleichung

$$F(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) = 0$$

genügenden Streifen

$$x_0 = f_1(v)\,, \quad y_0 = f_2(v)\,, \quad z_0 = f_3(v)\,, \quad p_0 = f_4(v)\,, \quad q_0 = f_5(v)\,.$$

Die von den Elementen dieses Streifens ausgehenden charakteristischen Kurven bilden die gesuchte Integralfläche, deren Gleichung wie oben aufgestellt wird.

Liegt die gegebene Kurve

$$x_0 = \xi_0\,, \quad z_0 = \varphi(y_0)\,, \tag{24}$$

wo ξ_0 eine Konstante und $\varphi(y_0)$ eine in der Umgebung von $y_0 = \eta_0$ reguläre Funktion darstellt, in einer zur yz-

*) Vgl. die Fußnote auf S. 50.

Ebene parallelen Ebene, so ist v durch y_0 zu ersetzen; die zweite Gleichung (23) ergibt

$$q_0 = \varphi'(y_0)\,, \tag{25}$$

und p_0 wird, wenn P_0 von Null verschieden ist, durch die Gleichung

$$F(\xi_0\,,\, y_0\,,\, \varphi(y_0)\,,\, p_0\,,\, \varphi'(y_0)) = 0 \tag{26}$$

als Funktion von y_0 bestimmt. Die Gleichungen

$$\left\{\begin{aligned} x &= \varphi_1(u\,,\, \xi_0\,,\, y_0\,,\, \varphi(y_0)\,,\, p_0\,,\, \varphi'(y_0))\,,\\ y &= \varphi_2(u\,,\, \ldots\ldots\ldots\,,\, \varphi'(y_0))\,,\\ z &= \varphi_3(u\,,\, \ldots\ldots\ldots\,,\, \varphi'(y_0)) \end{aligned}\right. \tag{27}$$

mit den unabhängigen Veränderlichen u und y_0 stellen die durch die Kurve (24) gehende Integralfläche dar. Für $u = 0\,,\ y_0 = \eta_0$ ist

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}\,, & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial y_0}\,, & \dfrac{\partial y}{\partial y_0} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P_0\,, & Q_0 \\ 0\,, & 1 \end{vmatrix} = P_0$$

der Voraussetzung nach von Null verschieden. Die beiden ersten Gleichungen (27) ergeben also u und y_0 als Funktionen von x und y, welche in der Umgebung von $x = \xi_0\,,\ y = \eta_0$ regulär sind, und durch Einsetzen dieser Ausdrücke in die dritte Gleichung (27) erhält man z als Funktion von $x\,,\ y$, welche sich bei $x = \xi_0\,,\ y = \eta_0$ regulär verhält*).

Sind in den Gleichungen (18) $x_0\,,\ y_0\,,\ z_0$ von v unabhängig, so ist die Gleichung

$$dz_0 = p_0\, dx_0 + q_0\, dy_0$$

von selbst erfüllt. Wir haben in dem gegebenen Punkt $(x_0\,,\, y_0\,,\, z_0)$ ∞^1 Flächenelemente $(x_0\,,\, y_0\,,\, z_0\,,\, p_0\,,\, q_0)$, welche der Gleichung

$$F(x_0\,,\, y_0\,,\, z_0\,,\, p_0\,,\, q_0) = 0$$

---

*) Die Existenz einer durch eine gegebene Kurve gehenden Integralfläche der partiellen Differentialgleichung (A) ist im gegenwärtigen Paragraphen unabhängig von § 8 und § 9 von neuem bewiesen.

genügen und einen Elementarkegel bestimmen. Die bisherigen Betrachtungen bleiben im wesentlichen bestehen. Die von den genannten ∞^1 Flächenelementen ausgehenden Charakteristiken bilden ein Integral der partiellen Differentialgleichung (A) und zwar im allgemeinen eine Integralfläche, das „Integralkonoid" mit der Spitze (x_0, y_0, z_0).

Wir heben noch folgende Eigenschaften der Charakteristiken der partiellen Differentialgleichung (A) hervor.

Jede Integralfläche mit dem nicht singulären Flächenelement $(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)$ enthält die von diesem Flächenelement ausgehende Charakteristik.

Die Integralfläche

$$z = \Phi(x, y)$$

wird von der Ebene $x = x_0$ in der Kurve

$$x = x_0, \quad z = \Phi(x_0, y)$$

geschnitten. Von denjenigen ∞^1 Elementen der Fläche $z = \Phi(x, y)$, welche den Punkten dieser Kurve zugehören [und worunter sich auch das Flächenelement $(x_0, \ldots, q_0)$ befindet], gehen ∞^1 Charakteristiken aus, welche eine Integralfläche bilden und zwar, da durch die Kurve nur eine Integralfläche geht, genau die Fläche $z = \Phi(x, y)$. Diese Fläche enthält die von dem Element $(x_0, \ldots, q_0)$ ausgehende Charakteristik.

Die Kurve

$$x = x_0, \quad z = \varphi(y) \tag{28}$$

berührt das Flächenelement $(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)$, wenn $\varphi(y)$ eine beliebige analytische Funktion von y ist, welche die Bedingungen

$$\varphi(y_0) = z_0, \quad \varphi'(y_0) = q_0$$

erfüllt. Die durch die Kurve (28) bestimmte Integralfläche $z = \Phi(x, y)$ enthält die Charakteristik, welche von dem Element $(x_0, \ldots, q_0)$ ausgeht. Die Koeffizienten der Potenzreihe $\varphi(y)$ können willkürlich gewählt werden, wenn nur die Bedingungen für die Konvergenz erfüllt sind. Es gilt also der Satz:

Längs einer gegebenen Charakteristik berühren sich unendlich viele Integralflächen, welche von

unendlich vielen willkürlichen Konstanten abhängen.

Ein charakteristischer Streifen war in § 10 eingeführt als ein Streifen, welcher die Gleichung

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q}$$

befriedigt und einer Integralfläche angehört, die sich in der Nähe der Punkte des Streifens regulär verhält. Läßt man die letzte Bedingung fallen, so bleiben nur die Gleichungen

$$(29) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{P} = \dfrac{dy}{Q}\,, \\ dz = p\,dx + q\,dy\,, \\ F(x\,,\,y\,,\,z\,,\,p\,,\,q) = 0 \end{cases}$$

bestehen. Im allgemeinen erhält man durch Elimination von p und q aus diesen drei Gleichungen eine Differentialgleichung von der Form

$$(30) \qquad M\left(x\,,\,y\,,\,z\,;\;\frac{dy}{dx}\,,\;\frac{dz}{dx}\right) = 0\,.$$

Jede dieser Gleichung genügende Kurve, welche keine charakteristische Kurve ist, wird eine Integralkurve der Differentialgleichung (A) genannt. Nachdem für y eine beliebige Funktion von x gesetzt ist, hat man zur Bestimmung von z als Funktion von x eine Differentialgleichung erster Ordnung.

Jedem Punkt $(x\,,\,y\,,\,z)$ einer (nicht charakteristischen) Integralkurve wird ein den Gleichungen (8) genügendes Wertepaar $p\,,\,q$ zugeordnet. Von jedem Element $(x\,,\,y\,,\,z\,,\,p\,,\,q)$ des so erhaltenen Streifens geht eine charakteristische Kurve aus; diese charakteristischen Kurven bilden eine Integralfläche der partiellen Differentialgleichung. Für die Integralkurve und für die charakteristische Kurve, welche das Flächenelement $(x,\,y,\,z,\,p,\,q)$ gemeinsam haben, gelten die Gleichungen

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q}\,, \qquad dz = p\,dx + q\,dy\,;$$

für die beiden Kurven stimmen also im Punkt (x, y, z) die Werte $dx : dy : dz$ überein. **Die Integralkurve wird also von sämtlichen charakteristischen Kurven, welche die durch sie hindurchgehende Integralfläche bilden, berührt.** Die Integralkurve, welche hiernach als Rückkehrkante einer Integralfläche erscheint, ist eine singuläre Linie dieser Fläche.

Als **Beispiel** für die Cauchysche Integrationsmethode diene die Differentialgleichung

$$(\alpha) \qquad pq - xy = 0 .$$

Die Differentialgleichungen der Charakteristiken sind nach (16)

$$\frac{dx}{q} = \frac{dy}{p} = \frac{dz}{2pq} = \frac{dp}{y} = \frac{dq}{x}$$

oder mit Rücksicht auf (α)

$$p\,dx = q\,dy = \tfrac{1}{2}\,dz = x\,dp = y\,dq .$$

Aus

$$\frac{dp}{p} = \frac{dx}{x}, \quad \frac{dq}{q} = \frac{dy}{y}$$

folgt

$$(\beta) \qquad \frac{p}{p_0} = \frac{x}{x_0}, \quad \frac{q}{q_0} = \frac{y}{y_0},$$

wo die Integrationskonstanten die Bedingung

$$p_0\,q_0 = x_0\,y_0$$

erfüllen. Weiter ist

$$dz = 2p\,dx = 2q\,dy$$

oder

$$dz = \frac{2p_0}{x_0}\,x\,dx = \frac{2q_0}{y_0}\,y\,dy$$

oder

$$(\gamma) \qquad z - z_0 = \frac{p_0}{x_0}(x^2 - x_0^2) = \frac{q_0}{y_0}(y^2 - y_0^2) .$$

Die Gleichungen (β) und (γ) stellen die Charakteristiken dar.

Um die Integralfläche zu bestimmen, welche durch die gegebene Kurve

$$x_0 = \xi_0 = \text{konst.}, \quad z_0 = \varphi(y_0)$$

geht, setzen wir in den Charakteristikengleichungen (γ) nach (25) und (26)

$$q_0 = \varphi'(y_0), \qquad p_0 = \frac{x_0 y_0}{q_0} = \frac{\xi_0 y_0}{\varphi'(y_0)};$$

wir erhalten so die Gleichungen

$$z - \varphi(y_0) = \frac{y_0}{\varphi'(y_0)}(x^2 - \xi_0^2) = \frac{\varphi'(y_0)}{y_0}(y^2 - y_0^2),$$

aus welchen y_0 zu eliminieren ist*).

§ 12. Die lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung.

Wir wenden die bisherigen Betrachtungen auf die lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$\xi(x, y, z)\, p + \eta(x, y, z)\, q = \zeta(x, y, z) \tag{31}$$

an, wo ξ, η, ζ analytische Funktionen von x, y, z sind**).

Setzt man

$$F(x, y, z, p, q) = \xi p + \eta q - \zeta,$$

so ist

$$P = \frac{\partial F}{\partial p} = \xi, \qquad Q = \frac{\partial F}{\partial q} = \eta.$$

Die in § 10 aufgestellten Differentialgleichungen der Charakteristiken vereinfachen sich hier. Für die Elemente einer Charakteristik, welche der Differentialgleichung genügen, ist

$$pP + qQ = p\xi + q\eta = \zeta.$$

Die drei ersten Differentialgleichungen (15) schreiben sich jetzt

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dx}{du} &= \xi(x, y, z), \\ \frac{dy}{du} &= \eta(x, y, z), \\ \frac{dz}{du} &= \zeta(x, y, z) \end{aligned}\right. \tag{32}$$

*) Die Cauchysche Integrationsmethode läßt sich ohne neue Schwierigkeiten für eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung mit beliebig vielen unabhängigen Veränderlichen darstellen.

**) Vgl. die Behandlung der linearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung mit n unabhängigen Veränderlichen in § 4.

oder

$$(33)\qquad \frac{dx}{\xi(x,y,z)} = \frac{dy}{\eta(x,y,z)} = \frac{dz}{\zeta(x,y,z)};$$

sie können, da sie von p, q unabhängig sind, ohne Rücksicht auf die beiden letzten Differentialgleichungen (15) integriert werden. Ist $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ ein Wertsystem, für welches die drei Funktionen ξ, η, ζ nicht sämtlich verschwinden und in dessen Umgebung sie sich regulär verhalten, so ist eine und nur eine analytische Lösung

$$(34)\qquad \begin{cases} x = \varphi_1(u, x_0, y_0, z_0), \\ y = \varphi_2(u, x_0, y_0, z_0), \\ z = \varphi_3(u, x_0, y_0, z_0) \end{cases}$$

der Differentialgleichungen (32) vorhanden, welche die Bedingung erfüllt:

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0 \quad \text{für} \quad u = 0.$$

Mit anderen Worten, durch den nicht singulären Punkt (x_0, y_0, z_0) geht eine und nur eine charakteristische Kurve (34) der Differentialgleichung (31). Da man die zu $x = x_0$ gehörigen Werte y_0 und z_0 als willkürliche Konstante ansehen kann, so sind ∞^2 charakteristische Kurven vorhanden.

Jeder charakteristischen Kurve entsprechen jetzt ∞^1 charakteristische Streifen, denn die beiden letzten Differentialgleichungen (15) nehmen, wenn man für x, y, z die Ausdrücke (34) mit festen Werten von x_0, y_0, z_0 einsetzt, die Form an:

$$\frac{dp}{du} = g_1(u, p, q), \qquad \frac{dq}{du} = g_2(u, p, q);$$

integriert man sie mit der Maßgabe, daß für $u = 0$ $p = p_0$, $q = q_0$ sein soll, während zwischen p_0 und q_0 die Beziehung

$$\xi(x_0, y_0, z_0)\, p_0 + \eta(x_0, y_0, z_0)\, q_0 = \zeta(x_0, y_0, z_0)$$

besteht, so erhält man p, q als Funktionen von u mit einer willkürlichen Konstanten.

Durch eine Kurve, welche nicht zu den charakteristischen gehört, ist wie in § 11 ein der Differentialgleichung

genügender Streifen von Flächenelementen bestimmt. Die Integralfläche, welche die von den Elementen des Streifens ausgehenden Charakteristiken bilden, ist hier nichts anderes als die Fläche, welche aus den von den Punkten der gegebenen Kurve ausgehenden charakteristischen Kurven besteht. Es gilt also der Satz:

Die charakteristischen Kurven, welche von den Punkten einer beliebigen nicht charakteristischen Kurve ausgehen, bilden eine Integralfläche der linearen partiellen Differentialgleichung (31).

Die durch die Kurve

$$x_0 = f_1(v)\,, \quad y_0 = f_2(v)\,, \quad z_0 = f_3(v)$$

bestimmte Integralfläche wird, nachdem die Differentialgleichungen (32) der Charakteristiken in der Form (34) integriert sind, durch die Gleichungen dargestellt:

$$\begin{aligned} x &= \varphi_1(u\,,\, f_1(v)\,,\, f_2(v)\,,\, f_3(v))\,, \\ y &= \varphi_2(u\,,\, f_1(v)\,,\, f_2(v)\,,\, f_3(v))\,, \\ z &= \varphi_3(u\,,\, f_1(v)\,,\, f_2(v)\,,\, f_3(v))\,. \end{aligned}$$

Sind die charakteristischen Kurven durch die Gleichungen

$$F_1(x\,,\, y\,,\, z) = C_1\,, \quad F_2(x\,,\, y\,,\, z) = C_2$$

mit den willkürlichen Konstanten C_1, C_2 dargestellt, so stellt die Gleichung

$$\Phi(F_1(x\,,\, y\,,\, z)\,,\, F_2(x\,,\, y\,,\, z)) = 0$$

mit der willkürlichen Funktion Φ eine aus ∞^1 charakteristischen Kurven bestehende Fläche, d. h. eine Integralfläche der Differentialgleichung (31) dar. Diese Fläche geht durch die gegebene Kurve

$$x = f_1(v)\,, \quad y = f_2(v)\,, \quad z = f_3(v)\,,$$

wenn man die Funktion Φ so bestimmt, daß die Gleichung

$$\Phi(F_1[f_1(v)\,,\, \ldots]\,,\, F_2[f_1(v)\,,\, \ldots]) = 0$$

identisch in v erfüllt ist.

An die Stelle des Integralkonoids mit der Spitze $(x_0\,,\, y_0\,,\, z_0)$ tritt hier die zweifache Mannigfaltigkeit von Flächenelementen, welche aus den ∞^1 Punkten der von

(x_0, y_0, z_0) ausgehenden charakteristischen Kurve und den ∞^2 Ebenen besteht, welche diese Kurve berühren.

Beispiel 1. Die Differentialgleichung der Zylinderflächen.

Die Charakteristiken der linearen partiellen Differentialgleichung

$$a p + b q = 1$$

ergeben sich durch Integration der Differentialgleichungen

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{dz}{1}$$

in der Form

$$x - a z = C_1, \quad y - b z = C_2;$$

es sind parallele gerade Linien, deren Richtungskosinus sich wie $a:b:1$ verhalten. Jede aus ∞^1 solchen Geraden bestehende Zylinderfläche stellt eine Integralfläche dar; ihre Gleichung ist

$$\Phi(x - a z, y - b z) = 0,$$

wo Φ eine willkürliche Funktion darstellt.

Beispiel 2. Die Differentialgleichung der Kegelflächen

$$p(x - a) + q(y - b) = z - c$$

hat die aus den Differentialgleichungen

$$\frac{dx}{x-a} = \frac{dy}{y-b} = \frac{dz}{z-c}$$

zu bestimmenden Charakteristiken

$$\frac{x-a}{z-c} = C_1, \quad \frac{y-b}{z-c} = C_2,$$

das sind gerade Linien durch den Punkt (a, b, c). Das allgemeine Integral

$$\Phi\left(\frac{x-a}{z-c}, \frac{y-b}{z-c}\right) = 0$$

stellt eine Kegelfläche mit dem Scheitel (a, b, c) dar.

Beispiel 3. Die Differentialgleichung der Rotationsflächen.

Die Differentialgleichung

$$p y - q x = 0$$

hat als charakteristische Kurven die aus den Differentialgleichungen

$$\frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x} = \frac{dz}{0}$$

sich ergebenden ∞^2 Kreise

$$x^2 + y^2 = C_1\,, \quad z = C_2\,,$$

deren Ebenen der xy-Ebene parallel sind und deren Mittelpunkte auf der z-Achse liegen. Das allgemeine Integral

$$\Phi(x^2 + y^2\,, z) = 0$$

stellt die Rotationsflächen dar, deren Rotationsachse die z-Achse ist.

§ 13. Der Ort der Rückkehrpunkte der charakteristischen Kurven *).

Bisher waren die (nur ausnahmsweise vorhandenen) singulären Integrale der partiellen Differentialgleichung

$$\text{(A)} \qquad F(x\,, y\,, z\,, p\,, q) = 0$$

ausgeschlossen, d. h. diejenigen Integrale, welche die Gleichungen

$$F = 0\,, \quad P = 0\,, \quad Q = 0\,, \quad X + pZ = 0\,, \quad Y + qZ = 0$$

befriedigen.

Indem man p und q aus den Gleichungen

$$(35) \qquad F = 0\,, \quad P = 0\,, \quad Q = 0$$

eliminiert, erhält man die Gleichung

$$(36) \qquad R(x\,, y\,, z) = 0\,,$$

welche nur ausnahmsweise eine Integralfläche von (A) darstellt; im allgemeinen bildet die Fläche (36), wie wir zeigen werden, den Ort der Rückkehrpunkte der charakteristischen Kurven.

---

*) Zu § 13 und § 14 vgl. Darboux, Mémoire sur les solutions singulières des équations aux dérivées partielles du premier ordre (Mém. des savants étrangers, Bd. 27).

Es sei

$$x = x_0\,,\quad y = y_0\,,\quad z = z_0\,,\quad p = p_0\,,\quad q = q_0$$

ein den drei Gleichungen (35) genügendes Flächenelement, also

$$x = x_0\,,\quad y = y_0\,,\quad z = z_0$$

ein Punkt der Fläche (36). Durch eine Koordinatentransformation sei dieser Punkt in den Anfangspunkt und jenes Flächenelement in die xy-Ebene verlegt; wir können also voraussetzen, daß die drei Gleichungen (35) das Flächenelement

$$x = 0\,,\quad y = 0\,,\quad z = 0\,,\quad p = 0\,,\quad q = 0$$

gemein haben. Die Funktion F sei in der Umgebung dieser Werte regulär, so daß sie sich in eine Potenzreihe von x, y, z, p, q entwickeln läßt, in welcher das konstante Glied und, da für die Nullwerte der Argumente $P = 0$, $Q = 0$ ist, auch die Koeffizienten von p und q verschwinden. Man hat also

$$(37)\quad \begin{cases} F = ax + by + cz + p(a'x + b'y + c'z) + q(a''x + b''y + c''z) \\ \qquad + \frac{1}{2}Ap^2 + Bpq + \frac{1}{2}Cq^2 + \varphi(x, y, z) + \dots, \end{cases}$$

wo $\varphi(x, y, z)$ eine ganze homogene Funktion zweiten Grades von x, y, z ist und die weggelassenen Glieder mindestens von der dritten Dimension in bezug auf x, y, z, p, q sind. Dann ist

$$P = a'x + b'y + c'z + Ap + Bq + \dots,$$

$$Q = a''x + b''y + c''z + Bp + Cq + \dots,$$

$$X = a + a'p + a''q + \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \dots,$$

$$Y = b + b'p + b''q + \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \dots,$$

$$Z = c + c'p + c''q + \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \dots.$$

Die Differentialgleichungen (15) der Charakteristiken sind, wenn wir rechts jedesmal die Glieder niedrigster Dimension anschreiben:

$$(38)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{du} = a'x + b'y + c'z + Ap + Bq + \dots, \\[2mm] \dfrac{dy}{du} = a''x + b''y + c''z + Bp + Cq + \dots, \\[2mm] \dfrac{dz}{du} = p(a'x + b'y + c'z) + q(a''x + b''y + c''z) \\ \qquad\quad + Ap^2 + 2Bpq + Cq^2 + \dots, \\[2mm] \dfrac{dp}{du} = -a + \dots, \\[2mm] \dfrac{dq}{du} = -b + \dots. \end{cases}$$

Um die von dem Flächenelement $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $p = 0$, $q = 0$ ausgehende Charakteristik zu finden, integrieren wir die Differentialgleichungen (38) unter der Voraussetzung, daß x, y, z, p, q für $u = 0$ verschwinden. Dann ergeben sich x, y, z, p, q als Potenzreihen von u, die wir nach dem Maclaurinschen Satze berechnen. Zunächst ist*)

$$\left(\frac{dx}{du}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{dy}{du}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{dz}{du}\right)_0 = 0,$$

$$\left(\frac{dp}{du}\right)_0 = -a, \quad \left(\frac{dq}{du}\right)_0 = -b,$$

ferner

$$\left(\frac{d^2x}{du^2}\right)_0 = A\left(\frac{dp}{du}\right)_0 + B\left(\frac{dq}{du}\right)_0 = -(Aa + Bb),$$

$$\left(\frac{d^2y}{du^2}\right)_0 = B\left(\frac{dp}{du}\right)_0 + C\left(\frac{dq}{du}\right)_0 = -(Ba + Cb),$$

$$\left(\frac{d^2z}{du^2}\right)_0 = 0;$$

---

*) Unter $(\varphi)_0$ wird der Wert der Funktion $\varphi(u)$ für $u = 0$ verstanden.

also hat man

$$(39') \qquad \begin{cases} p = -a\,u + \ldots, \\ q = -b\,u + \ldots \end{cases}$$

und

$$(39'') \qquad \begin{cases} x = -\tfrac{1}{2}(A\,a + B\,b)\,u^2 + \ldots, \\ y = -\tfrac{1}{2}(B\,a + C\,b)\,u^2 + \ldots; \end{cases}$$

die Einsetzung dieser Reihen in die dritte Differentialgleichung (38) oder

$$\frac{dz}{du} = p\,\frac{dx}{du} + q\,\frac{dy}{du}$$

ergibt

$$\frac{dz}{du} = (A\,a^2 + 2\,B\,a\,b + C\,b^2)\,u^2 + \ldots,$$

und daraus folgt

$$(39''') \qquad z = \tfrac{1}{3}(A\,a^2 + 2\,B\,a\,b + C\,b^2)\,u^3 + \ldots.$$

Ist $A\,a + B\,b$ von Null verschieden, so erhält man durch Elimination von u zwei Gleichungen von der Form

$$(40) \qquad y = \alpha\,x + \ldots, \quad z = \beta\,x^{\frac{3}{2}} + \ldots$$

als Gleichungen derjenigen charakteristischen Kurve, welche die xy-Ebene im Anfangspunkt $x = y = z = 0$ berührt. Die Form der Gleichungen (40) zeigt aber, daß der Anfangspunkt ein Rückkehrpunkt dieser Kurve ist.

Hiermit ist der Satz bewiesen:

Die durch Elimination von p und q aus den drei Gleichungen $F = 0$, $P = 0$, $Q = 0$ entstehende Gleichung $R(x, y, z) = 0$ stellt im allgemeinen den Ort der Rückkehrpunkte der charakteristischen Kurven der partiellen Differentialgleichung (A) dar.

§ 14. Eigenschaften des singulären Integrals.

Wir nehmen jetzt an, die partielle Differentialgleichung (A) habe eine singuläre Lösung

$$(41) \qquad z = \Phi(x, y),$$

welche nicht auch der Gleichung

$$Z = \frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

genügt. Wir suchen diejenigen charakteristischen Kurven, welche die Fläche $z = \Phi(x, y)$ in einem gegebenen Punkte berühren.

Durch die Transformation

$$z = \Phi(x, y) + z'$$

wird das singuläre Integral $z = \Phi(x, y)$ in ein singuläres Integral $z' = 0$ der transformierten Differentialgleichung übergeführt. Wir können demnach annehmen, die Differentialgleichung (A) besitze die singuläre Lösung

$$z = 0;$$

wir fragen nach den charakteristischen Kurven, welche die Ebene $z = 0$ im Punkte $x = x_0$, $y = y_0$, $z = 0$ berühren, oder nach den Charakteristiken, welche von dem Element

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = 0, \quad p = 0, \quad q = 0$$

ausgehen. Wenn für dieses Element Z von Null verschieden ist, läßt sich die Gleichung (A) auf die Form

$$z = \varphi(x, y, p, q) \tag{42}$$

bringen, wo φ in der Umgebung von $x = x_0$, $y = y_0$, $p = 0$, $q = 0$ regulär ist. Für jedes Element der singulären Integralfläche, d. h. für

$$z = 0, \quad p = 0, \quad q = 0$$

sind die drei Gleichungen

$$F = 0, \quad P = 0, \quad Q = 0$$

oder

$$z = \varphi(x, y, p, q), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial p} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial q} = 0$$

gleichzeitig erfüllt; daher fehlen in φ, $\frac{\partial \varphi}{\partial p}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial q}$ die von p und q freien Glieder, so daß in φ Glieder, welche in p

und q von geringerem als dem zweiten Grad sind, nicht vorkommen können. Wir schreiben

$$\varphi = \tfrac{1}{2} A p^2 + B p q + \tfrac{1}{2} C q^2 + \dots, \tag{43}$$

wo die weggelassenen Glieder in bezug auf $x - x_0$, $y - y_0$, p, q mindestens vom dritten Grad, in bezug auf p, q mindestens vom zweiten Grad sind. Die Differentialgleichungen der Charakteristiken schreiben sich hier, wenn man in den Formeln (15)

$$du = \frac{dt}{t}$$

setzt:

$$\left\{\begin{aligned} t\frac{dx}{dt} &= \frac{\partial\varphi}{\partial p} = A p + B q + \dots, \\ t\frac{dy}{dt} &= \frac{\partial\varphi}{\partial q} = B p + C q + \dots, \\ t\frac{dp}{dt} &= p - \frac{\partial\varphi}{\partial x} = p + \dots, \\ t\frac{dq}{dt} &= q - \frac{\partial\varphi}{\partial y} = q + \dots; \end{aligned}\right. \tag{44}$$

rechts sind die weggelassenen Glieder in bezug auf die vier Veränderlichen x, y, p, q mindestens vom zweiten Grad, in bezug auf p, q allein in den beiden ersten Gleichungen mindestens vom ersten Grad, in den beiden letzten mindestens vom zweiten Grad.

Setzt man

$$p = t p', \quad q = t q',$$

so gehen diese Differentialgleichungen über in

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= A p' + B q' + \dots, \\ \frac{dy}{dt} &= B p' + C q' + \dots, \\ \frac{dp'}{dt} &= \dots, \\ \frac{dq'}{}& \end{aligned}\right. \tag{45}$$

wo die rechten Seiten Potenzreihen von t, x, y, p', q sind. Sind die Werte α, β, welche p', q' für $t=0$ annehmen, beliebig vorgeschrieben, so ergeben sich x, y, p', q als Potenzreihen von t. Insbesondere ist

$$(46') \qquad \begin{cases} x = x_0 + (A\alpha + B\beta)t + \dots, \\ y = y_0 + (B\alpha + C\beta)t + \dots; \end{cases}$$

ferner ist

$$(46'') \qquad \begin{cases} p = \alpha t + \dots, \\ q = \beta t + \dots. \end{cases}$$

Aus

$$\frac{dz}{dt} = p\frac{dx}{dt} + q\frac{dy}{dt} = (A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2)t + \dots$$

folgt

$$(46''') \qquad z = (\tfrac{1}{2}A\alpha^2 + B\alpha\beta + \tfrac{1}{2}C\beta^2)t^2 + \dots.$$

Da die Differentialgleichungen (45) ungeändert bleiben, wenn man t durch ht und gleichzeitig p', q' durch $\frac{p'}{h}, \frac{q'}{h}$ ersetzt, so können auch die Konstanten α, β durch $\frac{\alpha}{h}, \frac{\beta}{h}$ ersetzt werden, ohne daß die Gleichungen (46) eine andere Charakteristik darstellen. Wir haben demnach ∞^1 (von der Konstanten $\frac{\alpha}{\beta}$ abhängige) charakteristische Kurven, welche die singuläre Integralfläche $z=0$ im Punkt $x=x_0$, $y=y_0$, $z=0$ berühren.

Sind x_0, y_0 die Koordinaten eines beliebigen Punktes der Fläche $z=0$, so stellen die Gleichungen (46) ∞^3 Charakteristiken dar; es fragt sich, wie wir dieselben zusammenfassen müssen, um eine Integralfläche der partiellen Differentialgleichung zu erhalten.

Setzt man

$$V = \frac{\partial z}{\partial v} - p\frac{\partial x}{\partial v} - q\frac{\partial y}{\partial v},$$

wo v einen Parameter darstellt, von welchem die Größen $x_0, y_0, \alpha:\beta$ abhängen, so ergibt sich wie in § 11 (S. 53)

$$\frac{\partial V}{\partial u} = t\frac{\partial V}{\partial t} = V,$$

da, wenn die partielle Differentialgleichung auf die Form

$$F = \varphi(x, y, p, q) - z = 0$$

gebracht wird, $Z = -1$ ist. Man hat also

$$V = C t,$$

wo C den Wert von

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial q}{\partial t}$$

für $t = 0$ darstellt. V verschwindet dann und nur dann, wenn $C = 0$ ist. Das Verschwinden von V ist aber die Bedingung dafür, daß die Charakteristiken (46), in welchen x_0, y_0, $\alpha : \beta$ gegebene Funktionen von v sind, eine Integralfläche darstellen.

Nun ist für $t = 0$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = A\alpha + B\beta, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = B\alpha + C\beta, \quad \frac{\partial p}{\partial t} = \alpha, \quad \frac{\partial q}{\partial t} = \beta,$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{d x_0}{d v}, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{d y_0}{d v}, \quad \frac{\partial p}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial q}{\partial v} = 0,$$

also

$$C = -\left(\alpha \frac{d x_0}{d v} + \beta \frac{d y_0}{d v}\right).$$

Die Gleichungen (46′) und (46‴) stellen also eine Integralfläche dar, wenn x_0, y_0, $\alpha : \beta$ Funktionen von v sind, welche die Bedingung

$$\alpha \frac{d x_0}{d v} + \beta \frac{d y_0}{d v} = 0 \tag{47}$$

erfüllen.

Sind x_0, y_0 konstant, so ist die Bedingung (47) erfüllt; die Charakteristiken, welche die singulare Integralfläche $z = 0$ im Punkt $x = x_0$, $y = y_0$, $z = 0$ berühren, bilden eine Integralfläche.

Ist in der singulären Integralfläche $z = 0$ eine analytische Kurve

$$x_0 = f_1(v), \quad y_0 = f_2(v) \tag{48}$$

gegeben, so stellen die Gleichungen (46) mit den Parametern v und $\alpha:\beta$ ∞^2 Charakteristiken dar. Ordnen wir jedem Wert von v den durch die Gleichung

$$\alpha \frac{dx_0}{dv} + \beta \frac{dy_0}{dv} = 0$$

definierten Wert $\alpha:\beta$ zu, so haben wir ∞^1 Charakteristiken, welche eine Integralfläche bilden, die die singuläre Integralfläche $z = 0$ längs der gegebenen Kurve berührt. Durch die Kurve (48) gehen demnach zwei Integralflächen, welche sich längs dieser Kurve berühren, nämlich die singuläre Integralfläche und die auf die beschriebene Weise von den Charakteristiken gebildete Fläche.

Das Ergebnis dieses Paragraphen läßt sich in den folgenden Satz zusammenfassen:

Besitzt die partielle Differentialgleichung (A)

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

ein singuläres Integral

$$z = \Phi(x, y),$$

so gehen von jedem Element $(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)$ der Fläche $z = \Phi$, in welchem

$$Z = \frac{\partial F}{\partial z}$$

nicht verschwindet, ∞^1 Charakteristiken aus*).

Die Differentialgleichung (A) besitzt eine Integralfläche, welche die singuläre Integralfläche $z = \Phi$ in dem Punkt (x_0, y_0, z_0) berührt, sowie auch eine Integralfläche, welche die Fläche $z = \Phi$ längs einer in derselben beliebig gegebenen analytischen Kurve berührt.

---

*) Dabei ist vorausgesetzt, daß die Funktion Φ in der Umgebung von $x = x_0$, $y = y_0$ und die Funktion F in der Umgebung $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, $p = p_0$, $q = q_0$ regulär ist.

§ 15. Vollständiges Integral*).

Unter einem vollständigen Integral der partiellen Differentialgleichung (A)

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

versteht man ein von zwei willkürlichen Konstanten a, b abhängiges Integral

$$z = \Phi(x, y, a, b), \tag{49}$$

welches so beschaffen ist, daß durch Elimination der Konstanten a, b aus der Gleichung (49) und den beiden Gleichungen

$$p = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \tag{50}$$

die Gleichung (A) und nur diese entsteht. Legt man den Größen a, b feste Werte bei, so stellen die Gleichungen (49) und (50) zwischen den fünf Größen x, y, z, p, q ∞^2 Flächenelemente (x, y, z, p, q) dar; läßt man dagegen a, b variieren, so werden durch die Gleichungen (49) und (50) ∞^4 Flächenelemente dargestellt, die mit den ∞^4 Flächenelementen (x, y, z, p, q), welche der Gleichung

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

genügen, identisch sind.

Ist ein vollständiges Integral (49) gegeben, so ist die zugehörige partielle Differentialgleichung (A) bestimmt. Man erhält sie durch Elimination von a, b aus der Gleichung (49) und den beiden Gleichungen (50). Wir fassen p, q als Funktionen von a, b auf und betrachten die Funktionaldeterminante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial p}{\partial a}, & \frac{\partial p}{\partial b} \\ \frac{\partial q}{\partial a}, & \frac{\partial q}{\partial b} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial a}, & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial b} \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial a}, & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial b} \end{vmatrix}.$$

*) Die Paragraphen 15—17 enthalten die von Lagrange und Monge begründete Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung.

Wären die Elemente dieser Determinante, d. h. die partiellen Ableitungen von p und q nach a und b, sämtlich Null, so wären p und q von a und b unabhängig, also nur von x und y abhängig; es würden also zwei Gleichungen zwischen p, q, x, y bestehen und nicht nur, wie vorausgesetzt wurde, die eine Gleichung (A). Wir haben zwei Fälle zu betrachten.

1. Die Determinante Δ ist von Null verschieden. Dann ergeben sich aus den Gleichungen (50) a, b als Funktionen von x, y, p, q; durch Einsetzung dieser Werte in die Gleichung (49) erhält man eine Gleichung zwischen x, y, z, p, q, in der z nicht fehlt, d. h. eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung.

2. Die Determinante Δ verschwindet, aber nicht sämtliche Elemente dieser Determinante. Dann besteht zwischen p und q eine Relation, die zwar x, y enthalten kann, aber von a, b unabhängig ist; denn Δ ist die Funktionaldeterminante von p, q, wenn diese Größen als Funktionen von a, b betrachtet werden. Ist z. B.

$$\frac{\partial q}{\partial b} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y\, \partial b}$$

von Null verschieden, so ergibt sich aus der zweiten Gleichung (50) b als Funktion von q, x, y, a, und durch Einsetzung dieses Ausdrucks in die erste Gleichung (50) erhält man p als Funktion von q, x, y, welche von a unabhängig ist. Man hat also eine Gleichung zwischen x, y, p, q, d. h. eine partielle Differentialgleichung, in welcher z nicht vorkommt.

Kennt man von einer partiellen Differentialgleichung

$$F(x, y, p, q) = 0, \tag{51}$$

in welcher z nicht explizit vorkommt, ein Integral

$$z = \Phi(x, y, a),$$

welches nur eine willkürliche Konstante a, aber diese nicht additiv*) enthält und so beschaffen ist, daß sich aus den Gleichungen

$$p = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

---

*) Die Konstante a wäre in $\Phi(x, y, a)$ additiv enthalten, wenn $\Phi(x, y, a) - a$ von a unabhängig wäre.

durch Elimination von a die Gleichung (51) ergibt, so stellt der Ausdruck

$$z = \Phi(x, y, a) + b \tag{52}$$

mit den willkürlichen Konstanten a, b ein vollständiges Integral dar.

Die Existenz eines vollständigen Integrals von (A) ergibt sich aus dem folgenden Satze (vgl. § 8).

Die Funktion $F(x, y, z, p, q)$ sei in der Umgebung der Stelle $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, $p = p_0$, $q = q_0$ regulär; an dieser Stelle sei $F = 0$, aber $\frac{\partial F}{\partial p}$ von Null verschieden. Es sei eine in der Umgebung von $y = y_0$, $a = a_0$, $b = b_0$ reguläre Funktion $\varphi(y, a, b)$ gegeben; für $y = y_0$, $a = a_0$, $b = b_0$ sei

$$\varphi = z_0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = q_0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial b} \neq 0.$$

Dann wird die partielle Differentialgleichung (A) durch eine analytische Funktion $z = \Phi(x, y, a, b)$ befriedigt, welche sich in der Umgebung von $x = x_0$, $y = y_0$, $a = a_0$, $b = b_0$ regulär verhält und für $x = x_0$ in die gegebene Funktion $\varphi(y, a, b)$ übergeht.

Dieser Satz folgt aus dem in § 2 ausgesprochenen Existenztheorem für eine partielle Differentialgleichung mit n unabhängigen Veränderlichen, indem man außer x, y auch a, b als unabhängige Veränderliche betrachtet, während F weder a, b noch die partiellen Ableitungen von z nach a, b enthält. Nach der über die Funktion φ gemachten Annahme kann $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial b}$ nicht identisch verschwinden; da somit nicht alle Elemente der oben mit Δ bezeichneten Determinante verschwinden, so ist das Integral $z = \Phi$ vollständig.

Auch das Integralkonoid mit der Spitze (x_0, y_0, z_0) stellt, wenn x_0 fest ist, $y_0 = a$, $z_0 = b$ als willkürliche Konstante aufgefaßt werden, ein vollständiges Integral dar*).

*) Für die lineare Differentialgleichung artet das Integralkonoid aus (§ 12); vollständige Integrale im erweiterten Lieschen Sinne, welche keine Flächen sind, wollen wir jedoch hier nicht betrachten.

§ 16. Ableitung des allgemeinen Integrals und der Charakteristiken, sowie des singulären Integrals aus einem vollständigen Integral.

Aus einem vollständigen Integral (49)

$$z = \Phi(x, y, a, b)$$

einer partiellen Differentialgleichung lassen sich alle anderen Integrale herleiten. Die Gleichung (A) ist das Resultat der Elimination der Größen a, b aus der Gleichung (49) und den Gleichungen (50)

$$p = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial \Phi}{\partial y}.$$

Wir suchen jetzt a und b auf die allgemeinste Weise als Funktionen von x und y so zu bestimmen, daß der Ausdruck (49) der partiellen Differentialgleichung (A) genügt oder, was auf dasselbe hinauskommt, daß die drei Gleichungen (49) und (50) zusammen bestehen. Durch partielle Differentiation des Ausdrucks (49) erhält man, wenn man auf die Veränderlichkeit von a und b Rücksicht nimmt:

$$p = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial x},$$

$$q = \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial y}.$$

Damit die Gleichungen (50) erfüllt sind, muß sein:

$$(53) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial a}\dfrac{\partial a}{\partial x} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial b}\dfrac{\partial b}{\partial x} = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial \Phi}{\partial a}\dfrac{\partial a}{\partial y} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial b}\dfrac{\partial b}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

Sieht man von dem Fall ab, daß a und b beide konstant sind, so können die Gleichungen (53) auf zwei Arten befriedigt werden:

1. Sind $\frac{\partial \Phi}{\partial a}$ und $\frac{\partial \Phi}{\partial b}$ nicht beide Null, so ist

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial a}{\partial x}, & \frac{\partial b}{\partial x} \\ \frac{\partial a}{\partial y}, & \frac{\partial b}{\partial y} \end{vmatrix} = 0 .$$

Es besteht also zwischen den Funktionen a, b von x, y eine Relation, welche b enthalten möge und welche wir auf die Form bringen:

$$b = \varphi(a) . \tag{54}$$

Ist die Funktion φ willkürlich angenommen, so reduzieren sich die beiden Gleichungen (53) auf die eine Gleichung

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a} + \frac{\partial \Phi}{\partial b} \varphi'(a) = 0 . \tag{55}$$

Der Ausdruck (49), in welchem a und b die durch die beiden Gleichungen (54) und (55) bestimmten Funktionen von x, y darstellen, ist ein Integral der partiellen Differentialgleichung (A), welches von einer willkürlichen Funktion φ abhängt und als **allgemeines Integral** bezeichnet wird.

2. Genügen die Funktionen a, b von x, y den Gleichungen

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a} = 0 , \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial b} = 0 , \tag{56}$$

so stellt der Ausdruck (49) ebenfalls ein Integral der Differentialgleichung (A) dar; wir werden zeigen, daß es ein singuläres Integral im früheren Sinne ist.

Das allgemeine Integral, welches erhalten wird, indem man

$$b = \varphi(a)$$

setzt und a aus den Gleichungen

$$\left\{ \begin{aligned} & z = \Phi(x, y, a, b) , \\ & \frac{\partial \Phi}{\partial a} + \frac{\partial \Phi}{\partial b} \frac{db}{da} = 0 \end{aligned} \right. \tag{57}$$

eliminiert, stellt geometrisch die Einhüllende der von dem Parameter a abhängigen Flächenschar

$$z = \Phi(x, y, a, \varphi(a)) \tag{58}$$

dar. Die Gleichungen (57), worin, nachdem $b = \varphi(a)$ gesetzt ist, dem Parameter a ein bestimmter Wert beigelegt wird, stellen die Schnittkurve der Fläche

$$z = \Phi(x, y, a, \varphi(a))$$

mit einer unendlich benachbarten Fläche der Schar und zugleich die Berührungskurve der Fläche mit der Einhüllenden der Flächenschar dar.

Durch die Kurve (57) gehen also zwei Integralflächen von (A), welche sich längs dieser Kurve berühren; daraus folgt, daß die Gleichungen (57) eine charakteristische Kurve darstellen. Die allgemeine Integralfläche, deren Gleichung durch Elimination von a aus (57) entsteht, setzt sich aus ∞^1 charakteristischen Kurven (57) mit dem Parameter a zusammen.

Sind a, b, c beliebig vorgeschriebene konstante Größen, so läßt sich eine Funktion φ so wählen, daß

$$b = \varphi(a), \qquad c = \varphi'(a)$$

wird. Die Gesamtheit der charakteristischen Kurven (57) kann demnach durch die Gleichungen

$$\left\{\begin{aligned} & z = \Phi(x, y, a, b), \\ & \frac{\partial \Phi}{\partial a} + c \frac{\partial \Phi}{\partial b} = 0 \end{aligned}\right. \tag{59}$$

mit den willkürlichen Konstanten a, b, c dargestellt werden.

Diejenigen charakteristischen Kurven, welche durch die Gleichungen (57) mit $b = \varphi(a)$ dargestellt werden, besitzen eine einhüllende Kurve, deren Gleichungen durch Elimination des Parameters a aus den drei Gleichungen

$$\left\{\begin{aligned} & z = \Phi(x, y, a, b), \\ & \frac{\partial \Phi}{\partial a} + \frac{\partial \Phi}{\partial b}\frac{db}{da} = 0, \\ & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial a^2} + 2\frac{\partial^2 \Phi}{\partial a \partial b}\frac{db}{da} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial b^2}\left(\frac{db}{da}\right)^2 + \frac{\partial \Phi}{\partial b}\frac{d^2 b}{da^2} = 0 \end{aligned}\right. \tag{60}$$

$\varphi(a)$ erhalten werden. Diese einhüllende Kurve
n sämtlichen charakteristischen Kurven (57) be-
ie ist eine Rückkehrkante der von den charakte-
n Kurven (57) gebildeten Integralfläche oder eine
kurve der Differentialgleichung (A).

$$z = \Phi(x, y, a, b)$$

lständiges Integral der partiellen Differen-
chung (A) und $\varphi(a)$ eine willkürliche Funk-
o stellt die Einhüllende der Flächenschar
$, y, a, \varphi(a))$ ein allgemeines Integral dar.
charakteristischen Kurven von (A) werden
die Gleichungen

$$z = \Phi(x, y, a, b),$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a} + c \frac{\partial \Phi}{\partial b} = 0$$

n drei willkürlichen Konstanten a, b, c dar-
t.
jenigen charakteristischen Kurven, für

$$b = \varphi(a), \quad c = \varphi'(a)$$

den die obige allgemeine Integralfläche;
en als einhüllende Kurve eine Rückkehr-
ieser Fläche, d. h. eine Integralkurve von (A).
itzen die ∞^2 Flächen (49)

$$z = \Phi(x, y, a, b)$$

Parametern a, b eine Einhüllende

$$z = \Phi(x, y),$$

t man diese durch Elimination von a und b aus
chung (49) und den beiden Gleichungen (60). Jedem
M der Einhüllenden mit den Koordinaten x, y, z
at ein Wertepaar a, b, welches den drei Glei-
(49) und (60) genügt; im Punkte M berühren
Einhüllende $z = \Phi(x, y)$ und die Integralfläche
$y, a, b)$. Die Gleichung (61) ergibt daher im Punkte M
Werte von p, q, wie die Gleichung (49); dem-
lt auch die Gleichung (61) eine Lösung der partiellen

Differentialgleichung (A) dar. Durch den Punkt M gehen ∞^1 charakteristische Kurven

$$z = \Phi(x, y, a, b), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial a} + c \frac{\partial \Phi}{\partial b} = 0,$$

welche den angenommenen festen Werten von a, b, aber einem willkürlichen Wert von c entsprechen; jede dieser Kurven berührt die Einhüllende im Punkte M.

Von einem Element (x, y, z, p, q) der Fläche $z = \Phi(x, y)$ gehen also unendlich viele Charakteristiken aus; daraus schließen wir, daß die Elemente (x, y, z, p, q) der Fläche (61) nicht nur der Gleichung

$$F(x, y, z, p, q) = 0,$$

sondern auch den Gleichungen

$$P = 0, \quad Q = 0$$

genügen.

Denn ist $(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)$ ein Element, für welches $F = 0$, aber P von Null verschieden ist, so gibt man den Differentialgleichungen der Charakteristik die Form

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q}{P},$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{pP + qQ}{P},$$

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{X + pZ}{P},$$

$$\frac{dq}{dx} = -\frac{Y + qZ}{P};$$

da die rechten Seiten dieser Gleichungen in der Umgebung von $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, $p = p_0$, $q = q_0$ regulär sind, so geht von dem angegebenen Flächenelement eine und nur eine Charakteristik aus. Wenn für das gegebene Flächenelement $P = 0$, aber Q von Null verschieden ist, so kommt man zu demselben Ergebnis, indem man x und y vertauscht.

Wenn eine Lösung $z = \Phi(x, y)$ der partiellen Differentialgleichung (A) den Gleichungen

$$P = 0, \quad Q = 0$$

genügt, so erfüllt sie auch die Gleichungen

$$X + pZ = 0\,, \quad Y + qZ = 0\,;$$

sie ist also eine singuläre Lösung im früheren Sinne.

Ist

$$z = \Phi(x\,, y\,, a\,, b)$$

ein vollständiges Integral der partiellen Differentialgleichung (A) und besitzt die Flächenschar $z = \Phi(x\,, y\,, a\,, b)$ mit den Parametern $a\,, b$ eine Einhüllende, so stellt diese ein singuläres Integral dar.

In § 14 wurde gezeigt, daß eine singuläre Integralfläche $z = \Phi(x\,, y)$ in einem beliebigen Punkt

$$x = x_0\,, \quad y = y_0\,, \quad z_0 = \Phi(x_0\,, y_0)$$

von einer anderen Integralfläche berührt wird; es kann demnach jede singuläre Integralfläche als Einhüllende einer Schar von Integralflächen mit zwei Parametern aufgefaßt werden.

Beispiel. Die Differentialgleichung

$$q = f(p)$$

hat das allgemeine Integral

$$z = ax + f(a)\,y + b\,;$$

denn durch Elimination von $a\,, b$ aus dieser Gleichung und

$$p = a\,, \quad q = f(a)$$

ergibt sich die Differentialgleichung. Das allgemeine Integral wird erhalten, indem man $b = \varphi(a)$ setzt und die Einhüllende der Ebenenschar

$$z = ax + f(a)\,y + \varphi(a)$$

durch Elimination von a aus der letzten Gleichung und der Gleichung

$$0 = x + f'(a)\,y + \varphi'(a)$$

bestimmt. Die durch das allgemeine Integral dargestellten Flächen sind abwickelbar.

Beispiel. Diejenigen Flächen, für welche die Länge der Normale zwischen der Fläche und der xy-Ebene den konstanten Wert R hat, genügen der Differentialgleichung

$$(\alpha) \qquad p^2 + q^2 = \frac{R^2}{z^2} - 1\,.$$

Sie hat das vollständige Integral

$$(\beta) \qquad (x-a)^2 + (y-b)^2 + z^2 = R^2\,,$$

denn durch Elimination von a und b aus dieser Gleichung und den Gleichungen

$$p = -\frac{x-a}{z}\,, \qquad q = -\frac{y-b}{z}$$

entsteht die Differentialgleichung. Die Gleichung (β) stellt eine Kugel vom Radius R dar, deren Mittelpunkt $(a, b, 0)$ ein beliebiger Punkt der xy-Ebene ist. Führt man die willkürliche Funktion $b = \varphi(a)$ ein und eliminiert man a aus den Gleichungen

$$(\gamma) \qquad \begin{cases} (x-a)^2 + (y-\varphi(a))^2 + z^2 = R^2\,, \\ x - a + (y - \varphi(a))\,\varphi'(a) = 0\,, \end{cases}$$

so hat man das allgemeine Integral; es erscheint als die Einhüllende derjenigen Kugeln, deren Mittelpunkte eine in der xy-Ebene willkürlich angenommene Kurve bilden. Durch Elimination von a und b aus (β) und $x - a = 0$, $y - b = 0$ erhält man das singuläre Integral $z^2 = R^2$, welches in die beiden Ebenen $z = R$ und $z = -R$ zerfällt, die sämtliche Kugeln berühren.

Die Charakteristiken werden durch die Gleichungen

$$(\delta) \qquad \begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 + z^2 = R^2\,, \\ x - a + c(y-b) = 0 \end{cases}$$

mit den drei willkürlichen Konstanten a, b, c dargestellt; es sind die Kreise vom Radius R, deren Mittelpunkte in der xy-Ebene liegen und deren Ebenen auf der xy-Ebene senkrecht stehen.

Die Einhüllende derjenigen charakteristischen Kurven, welche auf der Integralfläche (γ) liegen, wird durch Elimination von a aus den Gleichungen

$$(\varepsilon)\qquad \begin{cases} (x-a)^2+(y-\varphi(a))^2+z^2=R^2, \\ x-a+(y-\varphi(a))\,\varphi'(a)=0\,, \\ 1+\varphi'^2(a)+\varphi(a)\,\varphi''(a)-y\,\varphi''(a)=0 \end{cases}$$

gefunden.

§ 17. Aufsuchung eines vollständigen Integrals.

Wir betrachten jetzt ein System von zwei partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$(62)\qquad \begin{cases} F(x\,,\,y\,,\,z\,,\,p\,,\,q)=0\,, \\ G(x\,,\,y\,,\,z\,,\,p\,,\,q)=0\,; \end{cases}$$

die Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(F,\,G)}{\partial(p\,,\,q)}$$

sei von Null verschieden, so daß die Gleichungen (62) durch Auflösung nach p und q auf die Form

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\varphi(x\,,\,y\,,\,z)\,,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\psi(x\,,\,y\,,\,z)$$

gebracht werden können. Jede den Gleichungen (62) genügende Funktion z von x, y erfüllt die Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\psi=\frac{d\varphi}{dy}\,,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial z}\varphi=\frac{d\psi}{dx}\,,$$

woraus die Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\psi=\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial z}\varphi$$

oder

$$\frac{d\varphi}{dy} = \frac{d\psi}{dx} \tag{63}$$

folgt. Sollen die Gleichungen (62) eine gemeinsame Integralfläche besitzen, welche durch einen willkürlich gegebenen Punkt $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ geht, so muß die Bedingung (63) identisch erfüllt sein. Dann ist aber die mit dem System (62) gleichbedeutende totale Differentialgleichung

$$dz = \varphi(x, y, z)\,dx + \psi(x, y, z)\,dy \tag{64}$$

vollständig integrierbar; sie wird, wenn sich die Funktionen $\varphi(x, y, z)$, $\psi(x, y, z)$ in der Umgebung der Stelle $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ regulär verhalten, durch eine Funktion z von x, y befriedigt, welche für $x = x_0$, $y = y_0$ den Wert $z = z_0$ annimmt und in der Umgebung von $x = x_0$, $y = y_0$ regulär ist; dabei spielt z_0 die Rolle der Integrationskonstanten.

Um die Gleichung (64) nach der Mayerschen Methode zu integrieren, führt man sie durch die Substitution

$$x = x_0 + u\,, \quad y = y_0 + uv \tag{65}$$

über in

$$dz = (\varphi + v\psi)\,du + u\psi\,dv\,.$$

Die Lösung z der Differentialgleichung

$$\frac{dz}{du} = \varphi(x_0 + u, y_0 + uv, z) + v\psi(x_0 + u, y_0 + uv, z)\,,$$

welche für $u = 0$ den Wert $z = z_0$ annimmt, geht durch die Substitution (65) in diejenige der Gleichung (64) genügende Funktion z von x, y über, welche für $x = x_0$, $y = y_0$ den Wert $z = z_0$ annimmt.

Man kann die Integrabilitätsbedingung aus den ursprünglichen Gleichungen (62) bilden, ohne dieselben zuvor nach p, q aufzulösen. Zu diesem Zweck differentiieren wir die Gleichungen $F = 0$, $G = 0$ nach x und y, nachdem für p und q die Funktionen $\varphi(x, y, z)$, $\psi(x, y, z)$

gesetzt sind, wobei z als Funktion von x, y betrachtet wird. Wir erhalten so die Gleichungen

$$(66)\qquad \begin{cases} \dfrac{dF}{dx}+\dfrac{\partial F}{\partial p}\dfrac{d\varphi}{dx}+\dfrac{\partial F}{\partial q}\dfrac{d\psi}{dx}=0\,, \\ \dfrac{dG}{dx}+\dfrac{\partial G}{\partial p}\dfrac{d\varphi}{dx}+\dfrac{\partial G}{\partial q}\dfrac{d\psi}{dx}=0 \end{cases}$$

und

$$(67)\qquad \begin{cases} \dfrac{dF}{dy}+\dfrac{\partial F}{\partial p}\dfrac{d\varphi}{dy}+\dfrac{\partial F}{\partial q}\dfrac{d\psi}{dy}=0\,, \\ \dfrac{dG}{dy}+\dfrac{\partial G}{\partial p}\dfrac{d\varphi}{dy}+\dfrac{dG}{\partial q}\dfrac{d\psi}{dy}=0\,; \end{cases}$$

dabei ist die Bezeichnung benutzt:

$$\frac{d}{dx}=\frac{\partial}{\partial x}+p\frac{\partial}{\partial z}\,,\qquad \frac{d}{dy}=\frac{\partial}{\partial y}+q\frac{\partial}{\partial z}\,.$$

Die Elimination von $\dfrac{d\varphi}{dx}$ aus (66) ergibt

$$(68)\qquad \frac{\partial F}{\partial p}\frac{dG}{dx}-\frac{\partial G}{\partial p}\frac{dF}{dx}+\left(\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial G}{\partial q}-\frac{\partial G}{\partial p}\frac{\partial F}{\partial q}\right)\frac{d\psi}{dx}=0$$

und die Elimination von $\dfrac{d\psi}{dy}$ aus (67)

$$(69)\qquad \frac{\partial F}{\partial q}\frac{dG}{dy}-\frac{\partial G}{\partial q}\frac{dF}{\partial y}-\left(\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial G}{\partial q}-\frac{\partial G}{\partial p}\frac{\partial F}{\partial q}\right)\frac{d\varphi}{dy}=0\,.$$

Wenn man die beiden Gleichungen (68) und (69) addiert und die Bezeichnung

$$(70)\qquad [F\,,\,G]=\frac{\partial F}{\partial p}\frac{dG}{dx}-\frac{\partial G}{\partial p}\frac{dF}{dx}+\frac{\partial F}{\partial q}\frac{dG}{dy}-\frac{\partial G}{\partial q}\frac{dF}{dy}$$

einführt, erhält man die Identität

$$(71)\qquad [F\,,\,G]+\frac{\partial(F\,,\,G)}{\partial(p\,,\,q)}\left(\frac{d\psi}{dx}-\frac{d\varphi}{dy}\right)=0\,.$$

Ist die Integrabilitätsbedingung (63) erfüllt, so verschwindet der Ausdruck $[F, G]$, wenn man darin $p=\varphi$, $q=\psi$ setzt, d. h. die Gleichung $[F, G]=0$ ist eine Folge der Gleichungen $F=0$, $G=0$. Ist umgekehrt $[F, G]=0$

infolge der Gleichungen $F=0$, $G=0$, so folgt aus der Identität (71) die Bedingung (63).

Soll der aus den Gleichungen $p-\varphi=0$, $q-\psi=0$ gebildete Klammerausdruck

$$[p-\varphi,\ q-\psi]=\frac{d\varphi}{dy}-\frac{d\psi}{dx}$$

infolge dieser Gleichungen verschwinden, so muß er, da er von p und q nicht abhängt, identisch in x, y, z verschwinden. Es ist also zulässig, ein System $F=0$, $G=0$ zu betrachten, für welches der Klammerausdruck $[F, G]$ identisch verschwindet. Ein solches System wird als zweigliedriges Involutionssystem bezeichnet.

Sind die Funktionen F, G von z unabhängig, so geht der Klammerausdruck $[F, G]$, da jetzt

$$\frac{dF}{dx}=\frac{\partial F}{\partial x},\quad \frac{dF}{dy}=\frac{\partial F}{\partial y},$$

$$\frac{dG}{dx}=\frac{\partial G}{\partial x},\quad \frac{dG}{dy}=\frac{\partial G}{\partial y}$$

ist, in

$$(72)\qquad (F, G)=\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial G}{\partial x}-\frac{\partial G}{\partial p}\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial G}{\partial y}-\frac{\partial G}{\partial q}\frac{\partial F}{\partial y}$$

über. Die Gleichungen

$$(73)\qquad \begin{cases} F(x, y, p, q)=0, \\ G(x, y, p, q)=0 \end{cases}$$

lassen sich, wenn die Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(p, q)}$$

nicht verschwindet, auf die Form

$$p=\varphi(x, y),\quad q=\psi(x, y)$$

bringen; ist $(F, G)=0$ infolge von $F=0$, $G=0$, so ist

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\partial\psi}{\partial x};$$

das System (73) ist auf die Differentialgleichung

$$(74)\qquad dz=\varphi(x, y)\,dx+\psi(x, y)\,dy$$

zurückgeführt, welche durch eine Quadratur integriert wird.

Ein **vollständiges Integral der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung** (A)

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

läßt sich nach der Methode von Lagrange folgendermaßen bestimmen*).

Wir suchen eine Differentialgleichung erster Ordnung

$$G(x, y, z, p, q) = a, \tag{75}$$

welche eine willkürliche Konstante a enthält und mit der gegebenen Differentialgleichung ein Involutionssystem bildet. Wir verstehen also unter $u = G(x, y, z, p, q)$ eine Lösung der linearen Differentialgleichung

$$\left\{\begin{aligned} 0 &= [F, u] \\ &= \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial u}{\partial y} + \left(p\frac{\partial F}{\partial p} + q\frac{\partial F}{\partial q}\right)\frac{\partial u}{\partial z} \\ &\quad - \left(\frac{\partial F}{\partial x} + p\frac{\partial F}{\partial z}\right)\frac{\partial u}{\partial p} - \left(\frac{\partial F}{\partial y} + q\frac{\partial F}{\partial z}\right)\frac{\partial u}{\partial q} \end{aligned}\right. \tag{76}$$

oder, was auf dasselbe hinauskommt**), unter

$$G(x, y, z, p, q) = a$$

ein Integral des Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dx}{\frac{\partial F}{\partial p}} &= \frac{dy}{\frac{\partial F}{\partial q}} = \frac{dz}{p\frac{\partial F}{\partial p} + q\frac{\partial F}{\partial q}} \\ &= -\frac{dp}{\frac{\partial F}{\partial x} + p\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{dq}{\frac{\partial F}{\partial y} + q\frac{\partial F}{\partial z}}. \end{aligned}\right. \tag{77}$$

*) Als Verallgemeinerung der Methode von Lagrange erscheint die (zweite) Methode von Jacobi zur Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit beliebig vielen unabhängigen Veränderlichen.

**) Vgl. den I. Abschnitt oder „Gewöhnliche Differentialgleichungen", § 7.

Man sieht, daß die Gleichungen (77) nichts anderes sind als die Differentialgleichungen der Charakteristiken der partiellen Differentialgleichung (A).

Wir denken uns die Funktion G so gewählt, daß die Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial G}{\partial q} - \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial G}{\partial p}$$

nicht identisch verschwindet. Dann lassen sich die Gleichungen

$$F(x, y, z, p, q) = 0, \quad G(x, y, z, p, q) = a$$

in der Form

$$p = \varphi(x, y, z, a), \quad q = \psi(x, y, z, a) \tag{78}$$

auflösen, und die Differentialgleichung

$$dz = \varphi(x, y, z, a)\,dx + \psi(x, y, z, a)\,dy \tag{79}$$

ist vollständig integrierbar. Indem man diese Gleichung unter Einführung einer neuen willkürlichen Konstanten b integriert, erhält man ein vollständiges Integral

$$z = \Phi(x, y, a, b) \tag{80}$$

der partiellen Differentialgleichung (A).

Beispiel. Wir wenden die Methode von Lagrange auf die Differentialgleichung

$$q = f(p)$$

an. Die Differentialgleichungen der Charakteristiken

$$\frac{dx}{-f'(p)} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{-p f'(p) + q} = \frac{dp}{0} = \frac{dq}{0}$$

besitzen u. a. das Integral

$$p = a.$$

Die Gleichung

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

geht, wenn man $p = a$, $q = f(p) = f(a)$ setzt, in

$$dz = a\,dx + f(a)\,dy$$

über; die Integration ergibt das vollständige Integral

$$z = ax + f(a)y + b$$

der vorgelegten Differentialgleichung. Das allgemeine Integral wird aus dem vollständigen Integral wie in § 16 abgeleitet.

Es sei jetzt ein System von drei linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$
\left\{
\begin{aligned}
F(x, y, z, p, q) &= 0, \\
G(x, y, z, p, q) &= 0, \\
H(x, y, z, p, q) &= 0
\end{aligned}
\right. \tag{81}
$$

gegeben. Die Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(F, G, H)}{\partial(z, p, q)}$$

sei von Null verschieden, so daß die drei Gleichungen (81) in der Form

$$z = \Phi(x, y), \quad p = \Phi_1(x, y), \quad q = \Phi_2(x, y) \tag{82}$$

auflösbar sind. Ein gemeinsames Integral der drei Gleichungen ist dann und nur dann vorhanden, wenn

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \Phi_1, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \Phi_2, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \tag{83}$$

ist.

Wir zeigen, daß die drei Bedingungen (83) mit den Bedingungen

$$[F, G] = 0, \quad [F, H] = 0, \quad [G, H] = 0 \tag{84}$$

identisch sind.

Differentiiert man die Gleichung $F = 0$, worin unter z, p, q die Ausdrücke (82) verstanden werden, nach x, so erhält man

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\Phi_1 + \frac{\partial F}{\partial z}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \Phi_1\right) + \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial \Phi_2}{\partial x} = 0$$

oder

$$\frac{dF}{dx} + \frac{\partial F}{\partial z}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \Phi_1\right) + \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial \Phi_2}{\partial x} = 0.$$

Entsprechend hat man

$$\frac{dG}{dx} + \frac{\partial G}{\partial z}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \Phi_1\right) + \frac{\partial G}{\partial p}\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial q}\frac{\partial \Phi_2}{\partial x} = 0$$

Durch Elimination von $\frac{\partial \Phi_1}{\partial x}$ aus den beiden letzten Gleichungen ergibt sich

$$\frac{\partial F}{\partial p}\frac{dG}{dx}-\frac{\partial G}{\partial p}\frac{dF}{dx}+\frac{\partial(F,G)}{\partial(p,z)}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}-\Phi_1\right)+\frac{\partial(F,G)}{\partial(p,q)}\frac{\partial \Phi_2}{\partial x}=0$$

und hieraus durch Vertauschung von x und y

$$\frac{\partial F}{\partial q}\frac{dG}{dy}-\frac{\partial G}{\partial q}\frac{dF}{dy}+\frac{\partial(F,G)}{\partial(q,z)}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}-\Phi_2\right)-\frac{\partial(F,G)}{\partial(p,q)}\frac{\partial \Phi_1}{\partial y}=0.$$

Durch Addition erhält man die identische Gleichung

$$(85')\begin{cases}[F,G]+\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(p,z)}\left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}-\Phi_1\right)+\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(q,z)}\left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial y}-\Phi_2\right)\\ \qquad+\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(p,q)}\left(\dfrac{\partial \Phi_2}{\partial x}-\dfrac{\partial \Phi_1}{\partial y}\right)=0.\end{cases}$$

Hierzu kommen zwei weitere Gleichungen (85″) und (85‴), welche aus (85′) dadurch hervorgehen, daß man F, G durch F, H oder durch G, H ersetzt.

Hiernach haben die drei Gleichungen (83) die drei Gleichungen (84) zur Folge.

Sind umgekehrt die drei Bedingungen (84) erfüllt, so ist nach (85′)

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(p,z)}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}-\Phi_1\right)+\frac{\partial(F,G)}{\partial(q,z)}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}-\Phi_2\right)$$
$$+\frac{\partial(F,G)}{\partial(p,q)}\left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial x}-\frac{\partial \Phi_1}{\partial y}\right)=0;$$

hierzu kommen die beiden aus (85″) und (85‴) folgenden analogen Gleichungen. Wir haben somit drei lineare homogene Gleichungen mit den Unbekannten

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}-\Phi_1,\quad \frac{\partial \Phi}{\partial y}-\Phi_2,\quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial x}-\frac{\partial \Phi_1}{\partial y}.$$

Diese drei Größen verschwinden, da die Determinante dritten Grades aus ihren Koeffizienten von Null verschieden ist. Als Koeffizienten treten nämlich die Unterdeterminanten der Determinante

$$\varDelta=\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(z,p,q)}$$

auf; die aus den Unterdeterminanten von Δ gebildete Determinante dritten Grades ist gleich Δ^2, also von Null verschieden, da Δ nicht verschwinden soll.

Man kann demnach die Differentialgleichung (A)

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

integrieren, indem man zwei Funktionen G und H von x, y, z, p, q bestimmt, welche die Bedingungen (84)

$$[F, G] = 0, \quad [F, H] = 0, \quad [G, H] = 0$$

erfüllen und überdies so beschaffen sind, daß die Determinante

$$\frac{\partial (F, G, H)}{\partial (z, p, q)}$$

nicht verschwindet. Durch Elimination von p, q aus den drei Gleichungen

(86) $$F = 0, \quad G = a, \quad H = b,$$

worin a und b willkürliche Konstante sind, erhält man ein vollständiges Integral

(87) $$z = \varphi(x, y, a, b)$$

der Gleichung (A).

Zunächst ergibt sich $f = G$ als Integral der linearen partiellen Differentialgleichung

(88) $$[F, f] = 0$$

und hieraus $f = H$ als Integral des Systems linearer partieller Differentialgleichungen

(89) $$[F, f] = 0, \quad [G, f] = 0,$$

welches als vollständig nachgewiesen werden kann.

III. Abschnitt.

Partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen*).

§ 18. Beweis der Existenz der Integrale einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung.

Es liege die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung mit der abhängigen Veränderlichen z und den beiden unabhängigen Veränderlichen x, y vor:

$$\text{(A)} \qquad F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0 ;$$

dabei ist gesetzt:

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial z}{\partial y},$$

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \qquad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y}, \qquad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

F sei eine analytische Funktion der beigefügten Argumente, welche an der Stelle $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, $p = p_0$, $q = q_0$, $r = r_0$, $s = s_0$, $t = t_0$ verschwindet und sich in der Umgebung dieser Stelle regulär verhält. Wenn

$$\frac{\partial F}{\partial r}$$

---

*) Eingehender sind die partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung in den folgenden Werken behandelt:

Goursat, Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre. 2 Bände. Paris 1896, 1898.

Forsyth, Theory of differential equations. Vol. VI. Cambridge 1906.

In betreff der in den Abschnitten I—III behandelten Gegenstände vgl. Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften II A, 5 (E. v. Weber).

an der bezeichneten Stelle von Null verschieden ist, läßt sich die Gleichung (A) auf die Form

$$r = f(x, y, z, p, q, s, t) \tag{1}$$

bringen, wo f eine in der Umgebung der Stelle $x = x_0, \ldots, t = t_0$ reguläre Funktion der angegebenen sieben Argumente ist, welche an dieser Stelle den Wert r_0 annimmt.

Es seien zwei analytische Funktionen $\varphi(y)$, $\psi(y)$ von y gegeben, welche in der Umgebung von $y = y_0$ regulär sind, und zwar sei

$$\varphi(y_0) = z_0, \quad \varphi'(y_0) = q_0, \quad \varphi''(y_0) = t_0,$$
$$\psi(y_0) = p_0, \quad \psi'(y_0) = s_0.$$

Wir zeigen, daß die Differentialgleichung (A) oder (1) durch eine analytische Funktion z von x, y befriedigt wird, welche sich an der Stelle $x = x_0, y = y_0$ regulär verhält und so beschaffen ist, daß für $x = x_0$

$$z = \varphi(y), \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \psi(y)$$

wird *).

Wir nehmen $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ an und setzen

$$z = z' + \varphi(y) + x\psi(y) + \tfrac{1}{2}Ax^2,$$
$$A = f(0, 0, \varphi(0), \psi(0), \varphi'(0), \psi'(0), \varphi''(0)),$$

so daß

$$p = \frac{\partial z'}{\partial x} + \psi(y) + Ax,$$

$$q = \frac{\partial z'}{\partial y} + \varphi'(y) + x\psi'(y),$$

$$r = \frac{\partial^2 z'}{\partial x^2} + A,$$

$$s = \frac{\partial^2 z'}{\partial x \partial y} + \psi'(y),$$

$$t = \frac{\partial^2 z'}{\partial y^2} + \varphi''(y) + x\psi''(y)$$

*) Der folgende Goursatsche Beweis entspricht dem in § 1 und § 2 geführten Beweis des entsprechenden Satzes für eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung.

wird; dadurch geht die Gleichung (1) über in die Gleichung

$$\frac{\partial^2 z'}{\partial x^2} = f(x, y, z, p, q, s, t) - A,$$

deren rechte Seite, wenn für z, p, q, s, t die obigen Ausdrücke eingesetzt werden, sich in eine Potenzreihe von

$$x, \; y, \; z', \; \frac{\partial z'}{\partial x}, \; \frac{\partial z'}{\partial y}, \; \frac{\partial^2 z'}{\partial x \partial y}, \; \frac{\partial^2 z'}{\partial y^2}$$

ohne konstantes Glied entwickeln läßt; für $x = 0$ sollen z' und $\frac{\partial z'}{\partial x}$ verschwinden. Wir schreiben statt z' wieder z und betrachten die Differentialgleichung

$$r = f(x, y, z, p, q, s, t), \tag{2}$$

wo f eine Potenzreihe von $x, y, \ldots, t$ ist, welche für $x = y = \ldots = t = 0$ verschwindet; wir suchen der Differentialgleichung (2) durch eine in der Umgebung von $x = y = 0$ reguläre Funktion z von x, y zu genügen, welche die Bedingungen

$$z = 0, \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad \text{für} \quad x = 0$$

erfüllt.

Für diese Funktion ist*)

$$\left(\frac{\partial^\nu z}{\partial y^\nu}\right)_0 = 0, \qquad \left(\frac{\partial^{1+\nu} z}{\partial x \partial y^\nu}\right)_0 = 0.$$

Aus der Gleichung (2) folgt

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_0 = 0;$$

indem man (2) wiederholt nach y differentiiert, erhält man

$$\left(\frac{\partial^{2+\nu} z}{\partial x^2 \partial y^\nu}\right)_0$$

*) Der Wert einer Funktion φ für $x = 0, y = 0$ wird mit $(\varphi)_0$ bezeichnet.

usw. So ergeben sich sämtliche Größen

$$\left(\frac{\partial^{\mu+\nu} z}{\partial x^{\mu}\,\partial y^{\nu}}\right)_0 \qquad (\mu, \nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

aus den Koeffizienten der Potenzreihe f, und es bleibt noch die Konvergenz der Potenzreihe S

$$z = \sum_{\mu\nu} \frac{1}{\mu!\,\nu!}\left(\frac{\partial^{\mu+\nu} z}{\partial x^{\mu}\,\partial y^{\nu}}\right)_0 x^{\mu} y^{\nu} \tag{3}$$

für hinreichend kleine Werte von x und y nachzuweisen.

Die Reihe f sei für

$$|x| < \varrho, \quad |y| < \varrho, \quad |z| < \varrho, \quad |p| < \varrho, \quad |q| < \varrho,$$
$$|s| < R, \quad |t| < R$$

konvergent, und es sei in diesem Gebiete

$$|f| < M.$$

Die Funktion

$$\left\{\begin{aligned} &V(x, y, z, p, q, s, t) \\ &= \frac{M}{\left(1 - \dfrac{\frac{x}{\alpha} + y + z + p + q}{\varrho}\right)\left(1 - \dfrac{s + t}{R}\right)} - M, \end{aligned}\right. \tag{4}$$

worin $0 < \alpha < 1$ ist, läßt sich in eine Potenzreihe der angegebenen sieben Argumente entwickeln, deren Koeffizienten positiv und nicht kleiner sind als die entsprechenden Koeffizienten der Potenzreihe f *). Die Differentialgleichung

$$r = V(x, y, z, p, q, s, t) \tag{5}$$

wird formell befriedigt, indem man für z eine Potenzreihe S' von x, y setzt, welche nebst der Ableitung $\frac{\partial z}{\partial x}$ für $x = 0$ verschwindet und deren Koeffizienten positiv und nicht kleiner sind als die absoluten Beträge der entsprechenden Koeffizienten der Reihe S.

*) Vgl. § 2.

Wird die Differentialgleichung (5) durch eine Funktion z von $u = x + \alpha y$ befriedigt, so ist

$$(6)\quad \begin{cases} \left(1 - \dfrac{M(\alpha + \alpha^2)}{R}\right)\dfrac{d^2z}{du^2} - \dfrac{\alpha + \alpha^2}{R}\left(\dfrac{d^2z}{du^2}\right)^2 \\[2ex] = \dfrac{M}{1 - \dfrac{\dfrac{u}{\alpha} + z + (1+\alpha)\dfrac{dz}{du}}{\varrho}} - M\,. \end{cases}$$

Die rechte Seite läßt sich in eine Potenzreihe von z, u, $\dfrac{dz}{du}$ mit positiven Koeffizienten ohne konstantes Glied entwickeln; der Koeffizient von $\dfrac{d^2z}{du^2}$ auf der linken Seite ist positiv, wenn α so klein angenommen wird, daß $M(\alpha + \alpha^2) < R$ ist. Handelt es sich um das Integral z, für welches

$$z = 0\,,\qquad \frac{dz}{du} = 0\,,\qquad \frac{d^2z}{du^2} = 0 \quad \text{für} \quad u = 0$$

ist, so bringt man die Gleichung (6) durch Auflösung nach $\dfrac{d^2z}{du^2}$ auf die Form

$$\frac{d^2z}{du^2} = \varphi\left(u\,,\ z\,,\ \frac{dz}{du}\right),$$

wo φ eine Potenzreihe der drei beigefügten Argumente mit positiven Koeffizienten*) ohne konstantes Glied ist. Dieser Differentialgleichung wird durch eine konvergente Potenzreihe

$$(7)\qquad z = \left(\frac{d^3z}{du^3}\right)_0 u^3 + \dots$$

mit lauter positiven Koeffizienten genügt**).

Setzt man darin $u = x + \alpha y$, so hat man eine Potenzreihe S'' von x, y mit lauter positiven Koeffizienten,

---

*) Wie man durch Berechnung von φ nach der Methode der unbestimmten Koeffizienten erkennt.

**) Vgl. „Gewöhnl. Differentialgl.", S. 13 und 14.

welche der Differentialgleichung (2) genügt und für hinreichend kleine Werte von x und y konvergiert. Die Koeffizienten von $y^3, y^4, \ldots$ und $xy^2, xy^3, \ldots$ in der Reihe S'' sind positiv, während die entsprechenden Koeffizienten in der Reihe S' verschwinden; daraus folgt, daß der Koeffizient von $x^m y^n$ in der Reihe S' nicht größer ist als der entsprechende Koeffizient der Reihe S''. Demnach ist auch die Reihe S' für hinreichend kleine Werte von x und y konvergent, und das gleiche gilt von der Reihe S.

Es gilt also der Satz:

In der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung

(A) $$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$$

sei F eine analytische Funktion von x, y, z, p, q, r, s, t, welche sich in der Umgebung der Stelle $x = x_0, y = y_0, z = z_0, p = p_0, q = q_0, r = r_0, s = s_0, t = t_0$ regulär verhält und an dieser Stelle verschwindet, während $\frac{\partial F}{\partial r}$ von Null verschieden ist. Es seien zwei analytische Funktionen $\varphi(y), \psi(y)$ gegeben, welche sich in der Umgebung des Wertes $y = y_0$ regulär verhalten und die Bedingungen erfüllen:

$$\varphi(y_0) = z_0, \quad \varphi'(y_0) = q_0, \quad \varphi''(y_0) = t_0,$$
$$\psi(y_0) = p_0, \quad \psi'(y_0) = s_0.$$

Die Differentialgleichung (A) wird durch eine einzige analytische Funktion $z = \Phi(x, y)$ befriedigt, welche sich in der Umgebung der Stelle $x = x_0$, $y = y_0$ regulär verhält und für $x = x_0$ in die gegebene Funktion $\varphi(y)$ übergeht, während $\frac{\partial z}{\partial x}$ für $x = x_0$ gleich der gegebenen Funktion $\psi(y)$ wird.

§ 19. Integralfläche, welche einen gegebenen Streifen enthält.

Fassen wir wieder x, y, z als rechtwinklige Koordinaten eines Punktes im Raume auf, so stellt die Gleichung

$$z = \Phi(x, y)$$

eine Integralfläche der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung (A) dar, welche durch die vorgeschriebene Kurve

$$x = x_0 , \quad z = \varphi(y)$$

geht; in jedem Punkte dieser Kurve ist auch die Tangentialebene der Integralfläche durch Angabe der Werte

$$p = \psi(y) , \quad q = \varphi'(y)$$

vorgeschrieben. Mit anderen Worten, die Differentialgleichung (A) besitzt eine und nur eine analytische Integralfläche $z = \Phi(x, y)$, welche den Streifen $x = x_0$, $y = y$, $z = \varphi(y)$, $p = \psi(y)$, $q = \varphi'(y)$ enthält, dessen Kurve $x = x_0$, $z = \varphi(y)$ in einer zur yz-Ebene parallelen Ebene liegt.

Es seien jetzt

$$(8) \quad x = f_1(u), \quad y = f_2(u), \quad z = f_3(u), \quad p = f_4(u), \quad q = f_5(u)$$

als analytische Funktionen einer Veränderlichen u gegeben, welche die Bedingung

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

erfüllen; wir fragen nach einer Integralfläche der Differentialgleichung (A), welche den durch die Gleichungen (8) dargestellten Streifen von Flächenelementen (x, y, z, p, q) enthält.

In jedem Punkt der Kurve C

$$x = f_1(u), \quad y = f_2(u), \quad z = f_3(u)$$

sind die Werte

$$p = f_4(u), \quad q = f_5(u)$$

für die gesuchte Integralfläche vorgeschrieben. Die zugehörigen Werte r, s, t genügen den Gleichungen

$$(9) \quad \begin{cases} r\,dx + s\,dy - dp = 0 , \\ s\,dx + t\,dy - dq = 0 , \\ F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0 . \end{cases}$$

Setzt man

$$(10) \qquad R = \frac{\partial F}{\partial r}, \quad S = \frac{\partial F}{\partial s}, \quad T = \frac{\partial F}{\partial t},$$

so ist die Funktionaldeterminante der linken Seiten jener drei Gleichungen in bezug auf r, s, t:

$$(11)\qquad \Delta = \begin{vmatrix} dx, & dy, & 0 \\ 0, & dx, & dy \\ R, & S, & T \end{vmatrix} = R\,dy^2 - S\,dx\,dy + T\,dx^2.$$

Wir nehmen an, daß einem Element (x, y, z, p, q) des gegebenen Streifens ein den Gleichungen (9) genügendes Wertsystem r, s, t entspricht, für welches Δ von Null verschieden ist.

Wenn man die beiden ersten Gleichungen (9) nach der in (8) enthaltenen unabhängigen Veränderlichen u und die dritte Gleichung (9) zuerst partiell nach x und dann partiell nach y differentiiert, erhält man zur Berechnung der vier partiellen Ableitungen dritter Ordnung von z die vier linearen Gleichungen

$$\begin{aligned}
dx^2\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + 2\,dx\,dy\,\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y} + dy^2\,\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2} &= \ldots \\
dx^2\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y} + 2\,dx\,dy\,\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2} + dy^2\,\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} &= \ldots \\
R\,\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + S\,\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y} + T\,\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2} &= \ldots \\
R\,\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y} + S\,\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2} + T\,\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} &= \ldots;
\end{aligned}$$

die Determinante der Koeffizienten der Unbekannten,

$$\Gamma = \begin{vmatrix} dx^2, & 2\,dx\,dy, & dy^2, & 0 \\ 0, & dx^2, & 2\,dx\,dy, & dy^2 \\ R, & S, & T, & 0 \\ 0, & R, & S, & T \end{vmatrix},$$

ist, wie wir zeigen werden, gleich Δ^2, also von Null verschieden, so daß die partiellen Ableitungen dritter Ordnung von z eindeutig bestimmt sind. Unter der Voraussetzung, daß μ der Gleichung

$$R + S\mu + T\mu^2 = 0$$

genügt, vermehren wir die erste Kolonne der Determinante Δ' um die mit μ multiplizierte zweite, die mit μ^2 multiplizierte dritte und die mit μ^3 multiplizierte vierte Kolonne; dann enthält die erste Kolonne die Elemente

$$(dx + \mu\, dy)^2, \quad \mu(dx + \mu\, dy)^2, \quad 0, \quad 0,$$

so daß die Determinante Δ' durch $(dx + \mu\, dy)^2$ teilbar ist. Sind μ_1 und μ_2 die beiden Wurzeln der obigen quadratischen Gleichung, so ist

$$\begin{aligned} \Delta' &= T^2(dx + \mu_1\, dy)^2(dx + \mu_2\, dy)^2 \\ &= (T\,dx^2 - S\,dx\,dy + R\,dy^2)^2 = \Delta^2, \end{aligned}$$

w. z. b. w. Fährt man so fort, so erhält man auch für die partiellen Ableitungen höherer Ordnung von z bestimmte Werte. Die Differentialgleichung kann also, wenn Δ von Null verschieden ist, nur ein Integral besitzen, welches sich in der Umgebung eines Punktes der gegebenen Kurve regulär verhält.

Es ist noch zu zeigen, daß die Reihe

$$z = z_0 + p_0(x - x_0) + q_0(y - y_0) + \tfrac{1}{2} r_0 (x - x_0)^2 + \dots$$

in der Umgebung der Stelle $x = x_0$, $y = y_0$ konvergiert; dabei ist $(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)$ ein Element des gegebenen Streifens, während $r_0, \dots$ die zugehörigen Werte der partiellen Ableitungen zweiter und höherer Ordnung von z nach x und y darstellen.

Wir stellen die Kurve C durch die Gleichungen

$$y = f(x), \qquad z = g(x)$$

dar, wo $f(x)$, $g(x)$ für $x = x_0$ regulär sein mögen. An Stelle von x, y, z führen wir die neuen Veränderlichen

$$\mathfrak{x} = x, \qquad \mathfrak{y} = y - f(x), \qquad \mathfrak{z} = z - g(x)$$

ein und setzen

$$\mathfrak{p} = \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial \mathfrak{x}}, \qquad \mathfrak{q} = \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial \mathfrak{y}},$$

$$\mathfrak{r} = \frac{\partial^2 \mathfrak{z}}{\partial \mathfrak{x}^2}, \qquad \mathfrak{s} = \frac{\partial^2 \mathfrak{z}}{\partial \mathfrak{x}\, \partial \mathfrak{y}}, \qquad \mathfrak{t} = \frac{\partial^2 \mathfrak{z}}{\partial \mathfrak{y}^2}.$$

Die Gleichung

$$d\mathfrak{z} = \mathfrak{p}\, d\mathfrak{x} + \mathfrak{q}\, d\mathfrak{y}$$

geht durch Einführung von $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ über in

$$dz - g'(x)\,dx = \mathfrak{p}\,dx + \mathfrak{q}(dy - f'(x)\,dx)$$

oder

$$dz = (\mathfrak{p} - \mathfrak{q}f'(x) + g'(x))\,dx + \mathfrak{q}\,dy\,;$$

es ist also

$$\begin{aligned} p &= \mathfrak{p} - \mathfrak{q}f'(x) + g'(x)\,,\\ q &= \mathfrak{q} \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \mathfrak{p} &= p + qf'(x) - g'(x)\,,\\ \mathfrak{q} &= q\,. \end{aligned}$$

Die Gleichung

$$d\mathfrak{q} = \mathfrak{s}\,d\mathfrak{x} + \mathfrak{t}\,d\mathfrak{y}$$

geht über in

$$\begin{aligned} dq &= \mathfrak{s}\,dx + \mathfrak{t}(dy - f'(x)\,dx)\\ &= (\mathfrak{s} - \mathfrak{t}f'(x))\,dx + \mathfrak{t}\,dy \end{aligned}$$

und die Gleichung

$$d\mathfrak{p} = \mathfrak{r}\,d\mathfrak{x} + \mathfrak{s}\,d\mathfrak{y}$$

in

$$\begin{aligned} dp + f'(x)\,dq + qf''(x)\,dx - g''(x)\,dx\\ = \mathfrak{r}\,dx + \mathfrak{s}(dy - f'(x)\,dx) \end{aligned}$$

oder, wenn für dq der vorhin gefundene Ausdruck eingesetzt wird,

$$\begin{aligned} dp = (\mathfrak{r} - 2\mathfrak{s}f'(x) + \mathfrak{t}[f'(x)]^2 - \mathfrak{q}f''(x) + g''(x))\,dx\\ + (\mathfrak{s} - \mathfrak{t}f'(x))\,dy\,; \end{aligned}$$

folglich ist

$$\begin{aligned} r &= \mathfrak{r} - 2\mathfrak{s}f'(x) + \mathfrak{t}[f'(x)]^2 - \mathfrak{q}f''(x) + g''(x)\,,\\ s &= \mathfrak{s} - \mathfrak{t}f'(x)\,,\\ t &= \mathfrak{t}\,. \end{aligned}$$

Die vorgelegte Differentialgleichung geht in eine Gleichung von der Form

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r}, \mathfrak{s}, \mathfrak{t}) = 0$$

über. Die gegebene Kurve C hat in den neuen Veränderlichen die Gleichungen $\mathfrak{y} = 0$, $\mathfrak{z} = 0$; längs dieser Kurve ist q eine gegebene Funktion von x, also $\mathfrak{q}$ eine gegebene

Funktion von $\mathfrak{x}$. Wir haben also eine Funktion $\mathfrak{z}$ von $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ zu bestimmen, welche für $\mathfrak{y} = 0$ verschwindet, während die Ableitung $\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial \mathfrak{y}}$ für $\mathfrak{y} = 0$ in eine gegebene Funktion von $\mathfrak{x}$ übergeht.

Auf Grund der Gleichungen zwischen r, s, t und $\mathfrak{r}, \mathfrak{s}, \mathfrak{t}$ ist

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{r}} = \frac{\partial F}{\partial r},$$

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{s}} = -2 \frac{\partial F}{\partial r} f'(x) + \frac{\partial F}{\partial s},$$

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{t}} = \frac{\partial F}{\partial r} [f'(x)]^2 - \frac{\partial F}{\partial s} f'(x) + \frac{\partial F}{\partial t};$$

da

$$d\mathfrak{x} = dx, \quad d\mathfrak{y} = dy - f'(x)\, dx$$

ist, hat man

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{r}} d\mathfrak{y}^2 - \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{s}} d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y} + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{t}} d\mathfrak{x}^2$$
$$= \frac{\partial F}{\partial r} dy^2 - \frac{\partial F}{\partial s} dx\, dy + \frac{\partial F}{\partial t} dx^2 = \varDelta.$$

Längs der Kurve C, welche in die $\mathfrak{x}$-Achse übergeführt ist, ist $\mathfrak{y} = 0$, also $d\mathfrak{y} = 0$, so daß

$$\varDelta = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{t}} d\mathfrak{x}^2$$

ist. Da $\varDelta$ auf C von Null verschieden ist, so kann

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{t}}$$

nicht verschwinden; die transformierte Gleichung $\mathfrak{F} = 0$ läßt sich also nach $\mathfrak{t}$ auflösen. Nach dem in § 18 ausgesprochenen Satze besitzt diese Gleichung eine in der Umgebung von $\mathfrak{x} = x_0$, $\mathfrak{y} = 0$ reguläre Lösung $\mathfrak{z}$, welche so beschaffen ist, daß man für $\mathfrak{y} = 0$ $\mathfrak{z} = 0$, $\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial \mathfrak{y}} = 0$ hat.

Eine Funktion $z = \Phi(x, y)$, welche nicht nur der Differentialgleichung (A), sondern auch den Gleichungen

$$R = 0\,, \quad S = 0\,, \quad T = 0$$

genügt, heißt ein **singuläres Integral** der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung (A).

Jede nicht singuläre analytische Integralfläche

$$z = \Phi(x, y)$$

kann durch das oben dargestellte Verfahren erhalten werden. Wir nehmen auf der Fläche $z = \Phi(x, y)$ eine analytische Kurve an und erhalten, indem wir jedem Punkt der Kurve die Tangentialebene der Fläche zuordnen, einen Streifen von Flächenelementen (x, y, z, p, q), durch welchen eine Integralfläche eindeutig bestimmt ist, wenn

$$\Delta = R\,dy^2 - S\,dx\,dy + T\,dx^2$$

von Null verschieden ist.

§ 20. Die Charakteristiken einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung.

Wir haben gesehen, daß durch einen Streifen von Flächenelementen (x, y, z, p, q), welche die Bedingung

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

erfüllen, im allgemeinen eine Integralfläche der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung (A) bestimmt ist, nachdem für r, s, t ein den Gleichungen (9) genügendes Wertsystem festgelegt ist. Eine Unbestimmtheit kann nur dann eintreten, wenn die Elemente (x, y, z, p, q) des gegebenen Streifens und die aus (9) ermittelten zugehörigen Werte von r, s, t die Gleichung

$$(12) \qquad \Delta = R\,dy^2 - S\,dx\,dy + T\,dx^2 = 0$$

erfüllen.

Ein System von Werten der Größen

$$x, y, z, p, q, r, s, t$$

bezeichnen wir als Flächenelement zweiter Ordnung. **Eine einfache Mannigfaltigkeit von Flächenelementen zweiter Ordnung, welche der Gleichung**

$$R\,dy^2 - S\,dx\,dy + T\,dx^2 = 0$$

genügt und auf einer **Integralfläche** von (A) liegt, heißt eine **Charakteristik** (zweiter Ordnung) der **partiellen Differentialgleichung**. Für die Charakteristik gelten also auch die Gleichungen

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0\,,$$
$$dz = p\,dx + q\,dy\,,$$
$$dp = r\,dx + s\,dy\,,$$
$$dq = s\,dx + t\,dy\,,$$

sowie die Gleichungen, welche man erhält, wenn man die Gleichung (A) partiell nach x bzw. y differentiiert. Die letzteren Gleichungen lauten, wenn man

$$X = \frac{\partial F}{\partial x} + p\frac{\partial F}{\partial z} + r\frac{\partial F}{\partial p} + s\frac{\partial F}{\partial q}\,,$$
$$Y = \frac{\partial F}{\partial y} + q\frac{\partial F}{\partial z} + s\frac{\partial F}{\partial p} + t\frac{\partial F}{\partial q}$$

setzt und für die partiellen Ableitungen dritter Ordnung die Bezeichnung

$$\alpha = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\,,\qquad \beta = \frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}\,,\qquad \gamma = \frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}\,,\qquad \delta = \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$$

benutzt,

$$X + R\alpha + S\beta + T\gamma = 0\,,$$
$$Y + R\beta + S\gamma + T\delta = 0\,.$$

Ferner ist, da die Charakteristik einer Integralfläche angehört,

$$dr = \alpha\,dx + \beta\,dy\,,$$
$$ds = \beta\,dx + \gamma\,dy\,,$$
$$dt = \gamma\,dx + \delta\,dy\,.$$

Die Auflösung der drei linearen Gleichungen

$$\begin{aligned} R\alpha + S\beta + T\gamma &= -X\,,\\ \alpha\,dx + \beta\,dy \qquad &= dr\,,\\ \beta\,dx + \gamma\,dy &= ds \end{aligned}$$

mit den Unbekannten α, β, γ ergibt

$$\begin{vmatrix} R, & S, & T \\ dx, & dy, & 0 \\ 0, & dx, & dy \end{vmatrix} \alpha = \begin{vmatrix} X, & S, & T \\ dr, & dy, & 0 \\ ds, & dx, & dy \end{vmatrix}$$

oder

$$\Delta\alpha = -X\,dy^2 - S\,dr\,dy + T(dr\,dx - ds\,dy)\,.$$

Wegen $\Delta = 0$ muß auch

$$X\,dy^2 + S\,dr\,dy + T(ds\,dy - dr\,dx) = 0$$

sein; hieraus ergibt sich, wenn man den aus $\Delta = 0$ berechneten Wert

$$S = \frac{R\,dy^2 + T\,dx^2}{dx\,dy}$$

einsetzt,

$$X\,dx\,dy + R\,dr\,dy + T\,ds\,dx = 0\,.$$

Ähnlich erhält man die Gleichung

$$Y\,dx\,dy + R\,ds\,dy + T\,dt\,dx = 0\,.$$

Längs der Charakteristik sind also die folgenden Gleichungen erfüllt:

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} &F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0\,,\\ &dz = p\,dx + q\,dy\,,\\ &dp = r\,dx + s\,dy\,,\\ &dq = s\,dx + t\,dy\,,\\ &R\,dy^2 - S\,dx\,dy + T\,dx^2 = 0\,,\\ &X\,dx\,dy + R\,dr\,dy + T\,ds\,dx = 0\,,\\ &Y\,dx\,dy + R\,ds\,dy + T\,dt\,dx = 0\,.\end{aligned}\right.$$

Wir zeigen, daß diese Gleichungen nicht unabhängig voneinander sind. Wenn man die beiden letzten Gleichungen (13) durch dy bzw. dx dividiert und addiert, erhält man

$$X\,dx + Y\,dy + R\,dr + \left(T\frac{dx}{dy} + R\frac{dy}{dx}\right)ds + T\,dt = 0$$

oder mit Rücksicht auf $\Delta = 0$

$$X\,dx + Y\,dy + R\,dr + S\,ds + T\,dt = dF = 0\,.$$

Wir nehmen an, die Diskriminante $S^2 - 4RT$ der quadratischen Gleichung

$$(14) \qquad Rm^2 - Sm + T = 0$$

sei von Null verschieden. Sind überdies R und T von Null verschieden, so sind die voneinander verschiedenen Wurzeln m_1 und m_2 der Gleichung (14) weder gleich Null noch unendlich groß, und es ist

$$R(m_1 + m_2) = S\,, \qquad Rm_1 m_2 = T\,.$$

Die Gleichung $\Delta = 0$ zerfällt in die beiden Gleichungen

$$dy = m_1\,dx\,, \qquad dy = m_2\,dx\,.$$

Wir erhalten zwei Systeme von Charakteristiken, je nachdem wir die Gleichung $\Delta = 0$ durch die eine oder die andere dieser beiden Gleichungen ersetzen. Das erste Charakteristikensystem genügt den Differentialgleichungen

$$(15) \qquad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = m_1\,, \\[2mm] \dfrac{dz}{dx} = p + m_1 q\,, \\[2mm] \dfrac{dp}{dx} = r + m_1 s\,, \\[2mm] \dfrac{dq}{dx} = s + m_1 t\,, \\[2mm] \dfrac{dr}{dx} + m_2 \dfrac{ds}{dx} = -\dfrac{X}{R}\,, \\[2mm] \dfrac{ds}{dx} + m_2 \dfrac{dt}{dx} = -\dfrac{Y}{R}\ \text{*)}. \end{cases}$$

hung von m_1 und m_2 erhält man
leichungen des zweiten Systems
iken. Da die sechs Differential-
abhängige Veränderliche x und die
änderlichen y, z, p, q, r, s, t ent-

esetzt.

halten, so kann man für eine der abhängigen Veränderlichen eine **willkürliche Funktion** von x setzen und dann noch die Werte vorschreiben, welche die übrigen abhängigen Veränderlichen für einen gegebenen Wert von x annehmen.

Wir behalten die Annahme bei, daß $S^2 - 4RT$ von Null verschieden ist; die Voraussetzung, daß weder R noch T verschwindet, lassen wir jedoch fallen.

Ist $T = 0$, R aber von Null verschieden, so zerfällt die Gleichung (12) in die beiden Gleichungen

$$R\,dy - S\,dx = 0$$

und

$$dy = 0\,.$$

Man erhält ein erstes System von Charakteristiken, dessen Gleichungen aus den Gleichungen (13) dadurch hervorgehen, daß man die dortige fünfte Gleichung durch

$$R\,dy - S\,dx = 0$$

ersetzt. Für ein zweites System erhält man die Gleichungen

$$(13'')\quad \begin{cases} F(x\,,\,y\,,\,z\,,\,p\,,\,q\,,\,r\,,\,s\,,\,t) = 0\,, \\ dy = 0\,, \quad dz = p\,dx\,, \quad dp = r\,dx\,, \quad dq = s\,dx\,, \\ X + R\dfrac{dr}{dx} + S\dfrac{ds}{dx} = 0\,, \\ Y + R\dfrac{ds}{dx} + S\dfrac{dt}{dx} = 0\,. \end{cases}$$

Die vorletzte Gleichung erhält man durch Elimination von λ und β aus den Gleichungen

$$X + R\lambda + S\beta = 0\,,$$

$$dr = \lambda\,dx\,, \qquad ds = \beta\,dx\,;$$

ähnlich ergibt sich die letzte Gleichung.

Hat man gleichzeitig $R = 0$, $T = 0$, so hat das erste System von Charakteristiken die Gleichungen

$$(13')\quad \begin{cases} F = 0\,, \quad dy = 0\,, \quad dz = p\,dx\,, \quad dp = r\,dx\,, \quad dq = s\,dx\,, \\ X + S\dfrac{ds}{dx} = 0\,, \qquad Y + S\dfrac{dt}{dx} = 0\,. \end{cases}$$

Die Gleichungen des zweiten Charakteristikensystems sind

$$(13'')\left\{\begin{array}{l} F=0\,,\quad dx=0\,,\quad dz=q\,dy\,,\quad dp=s\,dy\,,\quad dq=t\,dy\,,\\ \qquad X+S\dfrac{dr}{dy}=0\,,\qquad Y+S\dfrac{ds}{dy}=0\,. \end{array}\right.$$

Eine nicht singuläre Integralfläche

$$z=\Phi(x\,,\,y)$$

der partiellen Differentialgleichung (A) enthält unendlich viele Charakteristiken, und zwar, wenn S^2-4RT von Null verschieden ist, unendlich viele Charakteristiken eines jeden der beiden Systeme.

Die Gleichung (12)

$$R\,dy^2-S\,dx\,dy+T\,dx^2=0\,,$$

worin

$$p=\frac{\partial\Phi}{\partial x}\,,\qquad q=\frac{\partial\Phi}{\partial y}\,,$$

$$r=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\,,\qquad s=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y}\,,\qquad t=\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}$$

gesetzt wird, stellt eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen x und y dar, welche in zwei Gleichungen

$$dy=m_1(x,y)\,dx\,,\qquad dy=m_2(x\,,\,y)\,dx$$

zerfällt (die im Falle $S^2-4RT=0$ identisch sind). Indem man eine dieser beiden Differentialgleichungen integriert und damit die Gleichung $z=\Phi(x\,,\,y)$ verbindet, erhält man unendlich viele (von einer willkürlichen Konstanten abhängende) Charakteristiken auf der Fläche $z=\Phi(x\,,\,y)$.

§ 21. Ein weiteres Existenztheorem.

An das in § 18 ausgesprochene Existenztheorem schließt sich der folgende Satz von Goursat an, den wir in § 22 zur Weiterführung der Theorie der Charakteristiken benutzen.

In der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\text{(B)}\qquad s=f(x\,,\,y\,,\,z\,,\,p\,,\,q\,,\,r\,,\,t)$$

sei f eine analytische Funktion, welche sich in der Umgebung der Werte $x=x_0\,,\;y=y_0\,,\;z=z_0\,,\;p=p_0\,,$

$q = q_0$, $r = r_0$, $t = t_0$ regulär verhält, während die partielle Ableitung

$$\frac{\partial f}{\partial r}$$

für diese Werte verschwindet; ferner seien zwei analytische Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(y)$ gegeben, welche bei $x = x_0$ bzw. $y = y_0$ regulär sind und den Gleichungen

$$\varphi(x_0) = \psi(y_0) = z_0\,,$$

$$\varphi'(x_0) = p_0\,, \qquad \psi'(y_0) = q_0\,,$$

$$\varphi''(x_0) = r_0\,, \qquad \psi''(y_0) = t_0$$

genügen. Dann wird die Differentialgleichung (B) durch eine in der Umgebung von $x = x_0$, $y = y_0$ reguläre Funktion z von x, y befriedigt, welche sich für $y = y_0$ auf $\varphi(x)$ und für $x = x_0$ auf $\psi(y)$ reduziert*).

Zum Beweise nehmen wir $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ an und setzen

$$z = z' + \varphi(x) + \psi(y) - z_0 + A\,x\,y\,,$$

$$A = f(0,\,0,\,z_0,\,p_0,\,q_0,\,r_0,\,t_0)\,,$$

so daß

$$p = \frac{\partial z'}{\partial x} + \varphi'(x) + A\,y\,,$$

$$q = \frac{\partial z'}{\partial y} + \psi'(y) + A\,x\,,$$

$$r = \frac{\partial^2 z'}{\partial x^2} + \varphi''(x)\,,$$

$$s = \frac{\partial^2 z'}{\partial x\,\partial y} + A\,,$$

$$t = \frac{\partial^2 z'}{\partial y^2} + \psi''(y)$$

*) Die Differentialgleichung (B) besitzt eine **Integralfläche**, welche durch die beiden sich schneidenden Kurven $y = y_0$, $z = \varphi(x)$ und $x = x_0$, $z = \psi(y)$ geht.

ist. Die Gleichung (B) geht in

$$\frac{\partial^2 z'}{\partial x\,\partial y} = f(x, y, z, p, q, r, t) - A$$

über, wo die rechte Seite nach Einsetzung der obigen Ausdrücke für z, p, q, r, t eine Potenzreihe von

$$x, \quad y, \quad z', \quad \frac{\partial z'}{\partial x}, \quad \frac{\partial z'}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 z'}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 z'}{\partial y^2}$$

ist, welche für die Nullwerte dieser Größen verschwindet; dasselbe gilt für die Ableitung der rechten Seite nach

$$\frac{\partial^2 z'}{\partial x^2}.$$

Wir betrachten demgemäß, indem wir statt z' wieder z schreiben, eine Differentialgleichung

$$s = f(x, y, z, p, q, r, t), \tag{16}$$

wo f in der Umgebung der Werte $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$, $t = 0$ regulär ist und für diese Werte nebst der Ableitung $\frac{\partial f}{\partial r}$ verschwindet. Wir suchen der Gleichung (16) durch eine Funktion z von x, y zu genügen, welche in der Umgebung von $x = 0$, $y = 0$ regulär ist und sowohl für $x = 0$, als auch für $y = 0$ verschwindet.

Für diese Funktion ist*)

$$\left(\frac{\partial^\nu z}{\partial x^\nu}\right)_0 = 0, \qquad \left(\frac{\partial^\nu z}{\partial y^\nu}\right)_0 = 0, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

und nach (16)

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)_0 = 0.$$

Indem man die Gleichung (16) nach x oder nach y partiell differentiiert, erhält man

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}, \qquad \frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}$$

*) Der Wert, welchen eine Funktion Φ von x, y für $x = 0$, $y = 0$ annimmt, wird mit $(\Phi)_0$ bezeichnet.

durch

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \qquad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$$

und die Ableitungen geringerer als dritter Ordnung ausgedrückt; man kennt also auch

$$\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}\right)_0, \qquad \left(\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}\right)_0.$$

Durch Fortsetzung dieses Verfahrens erhält man sämtliche Ableitungen

$$\left(\frac{\partial^{\mu+\nu} z}{\partial x^\mu \partial y^\nu}\right)_0$$

durch die Operationen der Addition und Multiplikation. Es ist zu zeigen, daß die Reihe S

$$z = \sum \frac{1}{\mu!\,\nu!}\left(\frac{\partial^{\mu+\nu} z}{\partial x^\mu \partial y^\nu}\right)_0 x^\mu y^\nu \tag{17}$$

konvergiert, wenn x und y hinreichend klein sind.

Wir nehmen an, die Reihe für die Funktion f sei für

$$|x| \le \varrho, \quad |y| \le \varrho, \quad |z| \le \varrho, \quad |p| \le \varrho, \quad |q| \le \varrho,$$
$$|r| \le R, \quad |t| \le R$$

konvergent und der absolute Betrag von f sei in dem angegebenen Gebiet höchstens gleich M. Die Funktion

$$V(x, y, z, p, q, r, t) = \frac{M}{\left(1 - \dfrac{x + y + z + p + q}{\lambda\varrho}\right)\left(1 - \dfrac{r + t}{R}\right)} - M\left(1 + \frac{r}{R}\right), \tag{18}$$

wo $0 < \lambda < 1$ ist, läßt sich in eine Potenzreihe von x, y, z, p, q, r, t entwickeln, in welcher das konstante Glied und der Koeffizient von r gleich Null sind, während die übrigen Koeffizienten positiv und nicht kleiner sind als die entsprechenden Koeffizienten in der Reihenentwicklung der Funktion f. Aus der Differentialgleichung

$$s = V(x, y, z, p, q, r, t) \tag{19}$$

erhält man für z eine Potenzreihe S' von x, y, welche für $x = 0$ und für $y = 0$ verschwindet und deren Koeffizienten positiv und nicht kleiner sind als die absoluten Beträge der Koeffizienten der aus (16) erhaltenen Reihe S.

Die Differentialgleichung (19) geht, wenn man für z eine Funktion von $u = x + \alpha y$ setzt, in

$$(20)\quad \begin{cases} \left(\alpha - \dfrac{M\alpha^2}{R}\right)\dfrac{d^2z}{du^2} - \left(\dfrac{\alpha + \alpha^3}{R} + \dfrac{M(1+\alpha^2)}{R^2}\right)\left(\dfrac{d^2z}{du^2}\right)^2 \\ \qquad = \dfrac{M}{1 - \dfrac{\dfrac{u}{\alpha} + z + (1+\alpha)\dfrac{dz}{du}}{\varrho}} - M \end{cases}$$

über. Wir nehmen α so klein an, daß der Koeffizient von $\dfrac{d^2z}{du^2}$ positiv ausfällt. Die rechte Seite der Gleichung läßt sich in eine Potenzreihe von u, z, $\dfrac{dz}{du}$ mit lauter positiven Koeffizienten (ohne konstantes Glied) entwickeln; die Gleichung kann auf die Form

$$\frac{d^2z}{du^2} = \varphi\left(u,\, z,\, \frac{dz}{du}\right)$$

gebracht werden, wo φ eine Potenzreihe mit positiven Koeffizienten und mit verschwindendem konstanten Glied ist. Die Gleichung (20) wird durch eine Potenzreihe

$$(21)\qquad z = \left(\frac{d^3z}{du^3}\right)_0 u^3 + \dots$$

mit positiven Koeffizienten befriedigt, welche für hinreichend kleine Werte von $|u|$ konvergiert.

Die Reihe (21) geht, wenn man $u = x + \alpha y$ setzt, in eine Potenzreihe S'' von x, y mit lauter positiven Koeffizienten über, welche in der Umgebung von $x = 0$, $y = 0$ konvergiert und der Differentialgleichung (19) genügt. Die Koeffizienten der Reihe S' sind nicht größer als die entsprechenden Koeffizienten der Reihe S''; denn die Koeffizienten von x^3, x^4, ..., y^3, y^4, ... in S'' sind positiv, während die entsprechenden Koeffizienten in S' verschwinden, und die übrigen Koeffizienten leiten sich aus

den angegebenen durch Addition und Multiplikation ab. Demnach ist auch die Reihe S' und weiterhin die Reihe S konvergent, wenn die absoluten Beträge von x und y hinreichend klein sind.

§ 22. Integralflächen, welche eine gegebene Charakteristik enthalten.

Es sei jetzt eine Charakteristik der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung (A) gegeben, d. h. eine einfache Mannigfaltigkeit von Flächenelementen zweiter Ordnung (x, y, z, p, q, r, s, t), welche den Gleichungen (13) genügen. Wir fragen nach den Integralflächen, welche die gegebene Charakteristik enthalten.

Wenn sich die Charakteristik an die Kurve

$$y = f(x)\,, \qquad z = g(x)$$

anschließt, bringen wir diese Kurve durch Anwendung der Substitution

$$\mathfrak{x} = x\,, \qquad \mathfrak{y} = y - f(x)\,, \qquad \mathfrak{z} = z - g(x)$$

auf die Form

$$y = 0\,, \qquad z = 0\,;$$

längs der Charakteristik ist dann $dy = 0$, $dz = 0$, also auf Grund der zweiten, dritten und vierten Gleichung (13)

$$0 = p\,dx\,, \qquad dp = r\,dx\,, \qquad dq = s\,dx\,,$$

so daß die Gleichungen der Charakteristik die Form erhalten:

$$y = 0\,, \qquad z = 0\,, \qquad p = 0\,, \qquad q = \varphi(x)\,,$$
$$r = 0\,, \qquad s = \varphi'(x)\,, \qquad t = \psi(x)\,.$$

Diese Gleichungen gehen durch Anwendung der Substitution

$$z' = z - y\,\varphi(x) - \tfrac{1}{2}\,y^2\,\psi(x)$$

in die Form

$$(22) \qquad y = 0\,, \quad z = 0\,, \quad p = 0\,, \quad q = 0\,, \quad r = 0\,, \quad s = 0\,, \quad t = 0$$

über, welche wir der weiteren Untersuchung zugrunde legen.

Wir suchen die Bedingungen auf, welche die linke Seite F der Differentialgleichung (A) erfüllen muß, damit die Gleichungen (22) eine Charakteristik darstellen. Dabei

CARNEGIE INSTITUTE OF TECHNOLOGY LIBRARY

nehmen wir an, daß sich die Funktion F in der Umgebung der Werte $x = y = z = \ldots = t = 0$ regulär verhält.

Da längs der Charakteristik $dy = 0$ und nach (12)

$$R\,dy^2 - S\,dx\,dy + T\,dx^2 = 0$$

ist, so muß $T = 0$ sein. Wenn wir annehmen, daß $S^2 - 4RT$ an der Stelle $x = y = \ldots = t = 0$ nicht verschwindet, so ist S an dieser Stelle von Null verschieden, und die Gleichung $F = 0$ läßt sich durch Auflösung nach s auf die Form bringen:

$$s = a\,x + b\,y + c\,z + d\,p + e\,q + h\,r + \ldots,$$

wo die weggelassenen Glieder von höherem als dem ersten Grad sind; ein Glied ersten Grades in t kommt nicht vor, da T für $x = y = \ldots = t = 0$ verschwindet. Wenn man x durch $x + hy$ ersetzt, wodurch sich die Gleichungen (22) nicht ändern, fällt das Glied hr fort, und die Differentialgleichung erhält die Form

$$(23)\qquad \begin{cases} s = f(x, y, z, p, q, r, t) \\ \quad = a\,x + b\,y + c\,z + d\,p + e\,q + \ldots. \end{cases}$$

Sollen die Differentialgleichungen der Charakteristiken, die wir jetzt in der Form (13^0)

$$F = 0, \quad dy = 0, \quad dz = p\,dx, \quad dp = r\,dx, \quad dq = s\,dx,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} + p\frac{\partial F}{\partial z} + r\frac{\partial F}{\partial p} + s\frac{\partial F}{\partial q} + R\frac{dr}{dx} + S\frac{ds}{dx} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} + q\frac{\partial F}{\partial z} + s\frac{\partial F}{\partial p} + t\frac{\partial F}{\partial q} + R\frac{ds}{dx} + S\frac{dt}{dx} = 0$$

einführen müssen, durch die Gleichungen (22) befriedigt werden, so muß

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

oder wegen $F = s - f$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

sein. Die Gleichung

$$T = \frac{\partial F}{\partial t} = 0$$

wird

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0 .$$

Die Potenzreihe $f(x, y, z, p, q, r, t)$ darf, da die Gleichung (23) für $y = z = p = q = r = t = 0$ den Wert $s = 0$ ergeben muß, kein Glied von der Form

$$\text{Konst. } x^n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

enthalten; dasselbe gilt dann für $\frac{\partial f}{\partial x}$. Damit in den Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial y}$ und $\frac{\partial f}{\partial t}$, welche für $y = z = \ldots = t = 0$ verschwinden müssen, kein Glied mit x^n vorkommt, darf f kein Glied mit $y x^n$ und mit $t x^n$ enthalten. Wenn in f die Glieder mit x^n, $y x^n$ und $t x^n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ fehlen, stellen die Gleichungen (22) wirklich eine Charakteristik der Differentialgleichung (23) dar.

Die Funktion $\varphi(y)$ verhalte sich in der Umgebung von $y = 0$ regulär und verschwinde für $y = 0$ nebst ihren beiden ersten Ableitungen. Nach dem in § 21 bewiesenen Satze besitzt die Differentialgleichung (23) ein in der Umgebung von $x = 0$, $y = 0$ reguläres Integral z, welches sich für $y = 0$ auf 0 und für $x = 0$ auf $\varphi(y)$ reduziert. Wir zeigen, daß in der Potenzreihenentwicklung dieses Integrals die Glieder mit $x^n y$ und $x^n y^2$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ fehlen.

Zunächst ist*)

$$\left(\frac{\partial^n z}{\partial x^n}\right)_0 = 0 , \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_0 = \varphi'(0) = 0 , \qquad \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_0 = \varphi''(0) = 0 .$$

Durch Differentiation der Gleichung (23)

$$s = f(x, y, z, p, q, r, t)$$

*) Unter $(\varphi)_0$ wird der Wert der Funktion φ von x, y für $x = y = 0$ verstanden.

nach y erhält man

$$(24)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^3 z}{\partial x\, \partial y^2} = \dfrac{\partial f}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial z} q + \dfrac{\partial f}{\partial p} f + \dfrac{\partial f}{\partial q} t \\ \qquad\qquad + \dfrac{\partial f}{\partial r} \dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2\, \partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial t} \dfrac{\partial^3 z}{\partial y^3}. \end{cases}$$

Da für $x = y = 0$ z, p, q, r, t sowie f, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial f}{\partial r}$, $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ verschwinden, so ist auch

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}\right)_0 = 0, \qquad \left(\frac{\partial^3 z}{\partial x\, \partial y^2}\right)_0 = 0.$$

Wir nehmen an, es sei

$$\left(\frac{\partial^{i+1} z}{\partial x^i\, \partial y}\right)_0 = 0, \qquad \left(\frac{\partial^{i+2} z}{\partial x^i\, \partial y^2}\right)_0 = 0, \qquad (i < n)$$

und zeigen, daß dann auch

$$\left(\frac{\partial^{n+1} z}{\partial x^n\, \partial y}\right)_0 = 0, \qquad \left(\frac{\partial^{n+2} z}{\partial x^n\, \partial y^2}\right)_0 = 0$$

ist.

Alle Glieder der Entwicklung der Funktion f enthalten eine der Größen y, z, p, q, r, t als Faktor. Wenn man zur Berechnung von

$$\frac{\partial^{n+1} z}{\partial x^n\, \partial y}$$

die Gleichung $s = f$ $(n-1)$-mal nach x differentiiert, enthält jedes Glied des Ergebnisses eine der Größen

$$z, \quad \frac{\partial z}{\partial x}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{n+1} z}{\partial x^{n+1}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1}\, \partial y}; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{n+1} z}{\partial x^{n-1}\, \partial y^2};$$

folglich ist

$$\left(\frac{\partial^{n+1} z}{\partial x^n\, \partial y}\right)_0 = 0.$$

Auch alle Glieder des Ausdrucks (24) für $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$, abgesehen von

$$\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}, \tag{25}$$

enthalten eine der Größen y, z, p, q, r, t als Faktor, und wenn man zur Berechnung von

$$\frac{\partial^{n+2} z}{\partial x^n \partial y^2}$$

die Gleichung (24) $n-1$-mal nach x differentiiert, verschwinden die Glieder wie vorhin für $x = y = 0$. Einer besonderen Prüfung bedarf der Ausdruck (25). Wenn man das Produkt

$$\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$$

$(n-1)$-mal nach x differentiiert, enthalten alle Glieder eine der Ableitungen

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{n+1} z}{\partial x^n \partial y}, \quad \frac{\partial^{n+2} z}{\partial x^{n+1} \partial y},$$

und zwar erscheint die zuletzt erwähnte Ableitung mit dem Faktor $\frac{\partial f}{\partial r}$. Die Größen

$$\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}\right)_0, \quad \ldots, \quad \left(\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1} \partial y}\right)_0$$

sind der Voraussetzung nach Null, wir haben gesehen, daß auch

$$\left(\frac{\partial^{n+1} z}{\partial x^n \partial y}\right)_0 = 0$$

ist, und wissen, daß $\frac{\partial f}{\partial r}$ für die Nullwerte der Argumente verschwindet. Die $(n-1)$-te Ableitung des Produktes

$$\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$$

nach x setzt sich aus Gliedern von der Form

$$\frac{\partial^{n-\nu} f}{\partial t\, \partial x^{n-\nu-1}} \frac{\partial^{3+\nu} z}{\partial y^{3+\nu}} \quad (\nu = 0, 1, \ldots, n-1)$$

zusammen. Da $\frac{\partial f}{\partial t}$ ebenso wie f nur Glieder mit einem der Faktoren y, z, p, q, r, t enthält, verschwinden für $x = y = 0$ alle Glieder von

$$\frac{\partial^{n-\nu-1}}{\partial x^{n-\nu-1}}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right).$$

Damit ist nachgewiesen, daß

$$(26) \qquad \left(\frac{\partial^n z}{\partial x^n}\right)_0 = 0\,, \qquad \left(\frac{\partial^{n+1} z}{\partial x^n\, \partial y}\right)_0 = 0\,, \qquad \left(\frac{\partial^{n+2} z}{\partial x^n\, \partial y^2}\right)_0 = 0$$
$$(n = 0, 1, 2, \ldots)$$

ist. Das Integral, welches die gegebenen Anfangsbedingungen erfüllt, gestattet eine Reihenentwicklung von der Form

$$(27) \qquad z = \varphi_3(x)\, y^3 + \varphi_4(x)\, y^4 + \ldots,$$

wo $\varphi_3, \varphi_4, \ldots$ Potenzreihen von x sind. Demnach ist für $y = 0$

$$z = 0\,, \quad p = 0\,, \quad q = 0\,, \quad r = 0\,, \quad s = 0\,, \quad t = 0\,.$$

Die Gleichung (27) stellt also eine Integralfläche der partiellen Differentialgleichung (23) dar, welche die Charakteristik (22) enthält. Die Koeffizienten der Potenzreihe $\psi(y)$ können willkürlich gewählt werden, sofern nur die Bedingungen für die Konvergenz erfüllt sind. Es gilt also der Satz:

Eine gegebene Charakteristik der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$$

gehört unendlich vielen Integralflächen an, welche von unendlich vielen willkürlichen Konstanten abhängen.

Diese Integralflächen haben längs der gegebenen Charakteristik eine Berührung zweiter Ordnung*).

*) Auf Existenztheoreme und Charakteristiken beziehen sich weitere Arbeiten von Goursat (Bull. de la Soc. math. de France, 1906; Ann. de la Fac. de Toulouse, 1903, 1904, 1906).

§ 23. Charakteristiken der Monge-Ampèreschen Differentialgleichung.

Wir beschäftigen uns eingehender mit einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung, welche in bezug auf

$$r\,, \quad s\,, \quad t\,, \quad rt - s^2$$

linear ist, d. h. mit einer Gleichung von der Form

$$\text{(C)} \qquad Hr + 2Ks + Lt + M + N(rt - s^2) = 0\,,$$

worin H, K, L, M, N von x, y, z, p, q abhängen (Differentialgleichung von Monge und Ampère).

Wir suchen eine Integralfläche zu bestimmen, welche durch einen gegebenen Streifen von Flächenelementen erster Ordnung geht; es seien also x, y, z, p, q gegebene Funktionen eines Parameters u, welche die Bedingung

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

erfüllen. Um die Werte von r, s, t zu berechnen, welche einem Element des gegebenen Streifens entsprechen, haben wir die Gleichung (C) mit den Gleichungen

$$dp = r\,dx + s\,dy\,,$$
$$dq = s\,dx + t\,dy$$

zu verbinden. Durch Elimination von r und t erhält man für s die Gleichung

$$Ps - Q = 0\,,$$

wobei gesetzt ist:

$$(28) \quad \begin{cases} P = H\,dy^2 - 2K\,dx\,dy + L\,dx^2 + N(dx\,dp + dy\,dq)\,, \\ Q = H\,dp\,dy + L\,dq\,dx + M\,dx\,dy + N\,dp\,dq\,. \end{cases}$$

Ist P von Null verschieden, so sind r, s, t eindeutig bestimmt; dasselbe gilt nach § 19 auch von den partiellen Ableitungen höherer Ordnung, so daß durch den gegebenen Streifen eine Integralfläche eindeutig bestimmt ist. Ist $P = 0$, aber Q von Null verschieden, so sind für r, s, t keine endlichen Werte vorhanden. Hat man gleichzeitig

$$P = 0\,, \quad Q = 0\,,$$

so sind die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung r, s, t nicht bestimmt; der gegebene Streifen wird dann ein cha-

rakteristischer Streifen oder eine Charakteristik erster Ordnung genannt.

Ein charakteristischer Streifen genügt den Gleichungen

$$P = 0\,, \quad Q = 0 \tag{29}$$

in Verbindung mit der Gleichung

$$dz = p\,dx + q\,dy\,.$$

Aus den Gleichungen (29) folgt bei beliebigem λ

$$\begin{aligned}\lambda P + NQ = {} & (N\,dp + L\,dx + \lambda\,dy)(N\,dq + H\,dy + \lambda\,dx) \\ & -(\lambda^2 + 2K\lambda + HL - MN)\,dx\,dy = 0\end{aligned}$$

oder, wenn λ eine Wurzel der Gleichung

$$\lambda^2 + 2K\lambda + HL - MN = 0 \tag{30}$$

ist,

$$\lambda P + NQ = (N\,dp + L\,dx + \lambda\,dy)(N\,dq + H\,dy + \lambda\,dx) = 0\,.$$

Hat die quadratische Gleichung (30) die beiden Wurzeln λ_1 und λ_2, so gilt die letzte Gleichung sowohl für $\lambda = \lambda_1$ als auch für $\lambda = \lambda_2$; wenn N nicht verschwindet und λ_1, λ_2 voneinander verschieden sind, sind die Gleichungen $P = 0$, $Q = 0$ und $\lambda_1 P + NQ = 0$, $\lambda_2 P + NQ = 0$ äquivalent; es ist also entweder

$$\left\{\begin{aligned} N\,dp + L\,dx + \lambda_1\,dy &= 0\,, \\ N\,dq + H\,dy + \lambda_2\,dx &= 0\,, \\ dz &= p\,dx + q\,dy \end{aligned}\right. \tag{31}$$

oder

$$\left\{\begin{aligned} N\,dp + L\,dx + \lambda_2\,dy &= 0\,, \\ N\,dq + H\,dy + \lambda_1\,dx &= 0\,, \\ dz &= p\,dx + q\,dy\,. \end{aligned}\right. \tag{32}$$

Ist $N = 0$, liegt also die in r, s, t lineare Gleichung

$$Hr + 2Ks + Lt + M = 0 \tag{C'}$$

vor, so ist

$$P = H\,dy^2 - 2K\,dx\,dy + L\,dx^2\,,$$

$$Q = H\,dp\,dy + L\,dq\,dx + M\,dx\,dy\,.$$

Ist H von Null verschieden, so seien λ_1 und λ_2 die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$H\lambda^2 - 2K\lambda + L = 0\,, \tag{33}$$

so daß

$$P = H(dy - \lambda_1\, dx)(dy - \lambda_2\, dx)$$

ist. Dann zerfallen die Gleichungen $P = 0$, $Q = 0$ in

$$\left\{\begin{aligned} dy - \lambda_1\, dx &= 0\,,\\ H\lambda_1\, dp + L\, dq + M\lambda_1\, dx &= 0 \end{aligned}\right. \tag{34}$$

und

$$\left\{\begin{aligned} dy - \lambda_2\, dx &= 0\,,\\ H\lambda_2\, dp + L\, dq + M\lambda_2\, dx &= 0\,. \end{aligned}\right. \tag{35}$$

Die Gleichungen (34) und (35), zu welchen jedesmal noch die Gleichung

$$dz = p\, dx + q\, dy$$

hinzuzufügen ist, stellen die beiden Systeme von Charakteristiken dar.

Ist $H = 0$, $L \neq 0$, so hat man

$$P = dx(2K\, dy - L\, dx)\,,$$

$$Q = dx(L\, dq + M\, dy)\,.$$

Man hat zwei Systeme von Charakteristiken mit den Gleichungen

$$\left\{\begin{aligned} 2K\, dy - L\, dx &= 0\,,\\ L\, dq + M\, dy &= 0 \end{aligned}\right. \tag{36}$$

und

$$\left\{\begin{aligned} dx &= 0\,,\\ 2K\, dp + L\, dq + M\, dy &= 0\,. \end{aligned}\right. \tag{37}$$

Die letzte Gleichung ergibt sich durch Elimination von s und t aus den drei Gleichungen

$$2Ks + Lt + M = 0\,,$$

$$dp = s\, dy\,, \qquad dq = t\, dy\,.$$

Zu (36) kommt die Gleichung

$$dz = p\, dx + q\, dy\,,$$

zu (37) die Gleichung

$$dz = q\, dy\,.$$

Ist $H = 0$, $L = 0$, so nimmt jede der beiden Gleichungen $P = 0$, $Q = 0$ die Form $dx\,dy = 0$ an, so daß entweder $dx = 0$ oder $dy = 0$ ist. Durch Elimination von s aus den Gleichungen

$$2Ks + M = 0, \quad dp = s\,dy$$

bzw.

$$2Ks + M = 0, \quad dq = s\,dx$$

erhält man die beiden Systeme von Charakteristiken

(38)
$$\begin{cases} dx = 0, \\ 2K\,dp + M\,dy = 0 \end{cases}$$

und

(39)
$$\begin{cases} dy = 0, \\ 2K\,dq + M\,dx = 0. \end{cases}$$

Zu den beiden Gleichungen (38) bzw. (39) tritt noch die Gleichung

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

hinzu, d. h. zu (38) die Gleichung

$$dz = q\,dy,$$

zu (39) die Gleichung

$$dz = p\,dx.$$

Wir bringen die Theorie der Charakteristiken erster Ordnung der Monge-Ampèreschen Gleichung (C) mit der in §§ 20—22 entwickelten Theorie der Charakteristiken der allgemeinen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung in Verbindung.

Die Differentialgleichungen der Charakteristiken der partiellen Differentialgleichung

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$$

hatten sich in § 20 in der Form ergeben:

(40)
$$\begin{cases} F = 0, \\ R\,dy^2 - S\,dx\,dy + T\,dx^2 = 0, \\ dz = p\,dx + q\,dy, \\ X\,dx\,dy + R\,dr\,dy + T\,ds\,dx = 0, \\ Y\,dx\,dy + R\,ds\,dy + T\,dt\,dx = 0, \\ dp = r\,dx + s\,dy, \\ dq = s\,dx + t\,dy. \end{cases}$$

Wenn

$$F = Hr + 2Ks + Lt + M + N(rt - s^2)$$

gesetzt wird, ist

$$R = \frac{\partial F}{\partial r} = H + Nt\,,$$

$$S = \frac{\partial F}{\partial s} = 2(K - Ns)\,,$$

$$T = \frac{\partial F}{\partial t} = L + Nr\,.$$

Die zweite Gleichung (40) wird hiernach

$$H\,dy^2 - 2K\,dx\,dy + L\,dx^2$$
$$+ N(r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2) = 0$$

oder, da mit Rücksicht auf die beiden letzten Gleichungen (40)

$$r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 = dx(r\,dx + s\,dy) + dy(s\,dx + t\,dy)$$
$$= dx\,dp + dy\,dq$$

ist,

(41) $$H\,dy^2 - 2K\,dx\,dy + L\,dx^2 + N(dx\,dp + dy\,dq) = 0\,.$$

Wenn man die aus den beiden letzten Gleichungen (40) berechneten Werte von r und t in (C) einsetzt und die Gleichung (41) berücksichtigt, erhält man

(42) $$H\,dp\,dy + L\,dq\,dx + M\,dx\,dy + N\,dp\,dq = 0\,.$$

Die Gleichungen (41) und (42), welche mit den Gleichungen $P = 0$, $Q = 0$ übereinstimmen, können an die Stelle der beiden ersten Gleichungen (40) gesetzt werden.

An die Stelle der drei ersten Gleichungen (40) setzen wir die drei Gleichungen

(43) $$P = 0\,,\quad Q = 0\,,\quad dz = p\,dx + q\,dy$$

zwischen x, y, z, p, q, welche eine Charakteristik erster Ordnung definieren, während zur Definition einer Charakteristik zweiter Ordnung zu den Gleichungen (43) noch die vier letzten Gleichungen (40) hinzuzufügen sind. Die Differentialgleichungen (43) der Charakteristiken erster Ordnung können wie oben umgeformt werden.

Jede Charakteristik zweiter Ordnung der Monge-Ampèreschen Gleichung (C) enthält eine Charakteristik erster Ordnung. Umgekehrt ist, wie wir zeigen werden, eine Charakteristik erster Ordnung, für welche $S^2 - 4RT$ von Null verschieden ist, in unendlich vielen Charakteristiken zweiter Ordnung enthalten, welche von einer willkürlichen Konstanten abhängen.

Sind nämlich längs einer Charakteristik erster Ordnung x, y, z, p, q als Funktionen eines Parameters u gegeben, so hat man zur Bestimmung von r, s, t die drei Gleichungen

$$(44)\qquad \begin{cases} dp = r\,dx + s\,dy\,, \\ dq = s\,dx + t\,dy\,, \\ X\,dx\,dy + R\,dr\,dy + T\,ds\,dx = 0\,, \end{cases}$$

da (S. 105) die fünfte Gleichung (40) eine Folge der übrigen ist. Aus den beiden ersten Gleichungen (44) folgt

$$r = \frac{dp - s\,dy}{dx}\,, \qquad t = \frac{dq - s\,dx}{dy}\,,$$

und aus

$$d^2p = r\,d^2x + s\,d^2y + dr\,dx + ds\,dy$$

erhält man

$$dr = \frac{d^2p - r\,d^2x - s\,d^2y - ds\,dy}{dx}\,.$$

Wenn man diesen Ausdruck für dr in die letzte Gleichung (44) einsetzt, erscheint ds mit dem Faktor

$$R\,dy^2 - T\,dx^2,$$

welcher nicht verschwindet; denn die Bedingung für das gleichzeitige Bestehen der beiden Gleichungen

$$R\,dy^2 - T\,dx^2 = 0\,, \quad R\,dy^2 - S\,dx\,dy + T\,dx^2 = 0$$

ist $S^2 - 4RT = 0$. Durch Elimination von r und t aus den drei Gleichungen (44) erhält man für s die Differentialgleichung erster Ordnung

$$(45)\qquad \frac{ds}{du} = f(s, u)\,,$$

aus welcher sich s als Funktion von u mit einer willkürlichen Konstanten ergibt. Die beiden ersten Gleichungen (44) liefern hierauf r und t als Funktionen von u. Ist der Wert von s für einen bestimmten Wert von u gegeben, so sind r, s, t längs der Charakteristik erster Ordnung bestimmt.

Wir können dieses Ergebnis auch so aussprechen:

Wenn zwei Integralflächen der Monge-Ampèreschen Gleichung in einem Punkte einer ihnen gemeinsamen Charakteristik erster Ordnung eine Berührung zweiter Ordnung haben, haben sie längs der Charakteristik eine Berührung zweiter Ordnung.

Indem wir die letzten Sätze mit dem in § 22 bewiesenen Satze über die Integralflächen der allgemeinen Differentialgleichung zweiter Ordnung durch eine gegebene Charakteristik verbinden, erhalten wir den Satz:

Durch eine Charakteristik erster Ordnung der Monge-Ampèreschen Gleichung gehen unendlich viele Integralflächen, welche von unendlich vielen willkürlichen Konstanten abhängen.

Denn die gegebene Charakteristik erster Ordnung gehört unendlich vielen Charakteristiken zweiter Ordnung (mit einer willkürlichen Konstanten) an, und durch jede solche Charakteristik zweiter Ordnung gehen unendlich viele Integralflächen (mit unendlich vielen willkürlichen Konstanten).

Eine Integralfläche der Monge-Ampèreschen Differentialgleichung (C) enthält unendlich viele Charakteristiken und zwar, wenn λ_1 und λ_2 verschieden sind, unendlich viele Charakteristiken eines jeden der beiden Systeme. Umgekehrt stellt jede Fläche, welche ∞^1 Charakteristiken eines Systems enthält, ein Integral dar.

Der erste Teil des Satzes ist in dem auf S. 108 ausgesprochenen Satze für die allgemeine Differentialgleichung zweiter Ordnung enthalten.

Um die zweite Behauptung zu beweisen, nehmen wir an, durch jeden Punkt der Fläche $z = \Phi(x, y)$ gehe eine auf der Fläche gelegene Charakteristik des ersten Systems. Setzt man

$$z = \Phi(x, y), \qquad p = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial \Phi}{\partial y},$$
$$r = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \qquad s = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}, \qquad t = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}$$

und geht man von dem beliebigen Flächenpunkte (x, y, z) längs der erwähnten Charakteristik weiter, so gelten die Gleichungen (31)

$$N\,dp + L\,dx + \lambda_1\,dy = 0,$$
$$N\,dq + \lambda_2\,dx + H\,dy = 0$$

und

$$dp = r\,dx + s\,dy,$$
$$dq = s\,dx + t\,dy.$$

Durch Elimination von dp und dq erhält man die Gleichungen

$$(Nr + L)\,dx + (Ns + \lambda_1)\,dy = 0,$$
$$(Ns + \lambda_2)\,dx + (Nt + H)\,dy = 0,$$

und hieraus geht durch Elimination von $dx:dy$ die Gleichung

$$(Nr + L)(Nt + H) - (Ns + \lambda_1)(Ns + \lambda_2) = 0$$

hervor, welche mit (C) übereinstimmt. Da die partiellen Ableitungen von $\Phi(x, y)$ der Gleichung (C) genügen, so ist $z = \Phi(x, y)$ eine Integralfläche.

Der unter der Voraussetzung eines von Null verschiedenen N geführte Beweis läßt sich auf den Fall $N = 0$ übertragen.

§ 24. Integrierbare Fälle der Monge-Ampèreschen Differentialgleichung.

Nur in besonderen Fällen sind wir in der Lage, die Differentialgleichung (C) durch Zurückführung auf gewöhnliche Differentialgleichungen zu integrieren.

Wir setzen vorläufig voraus, daß N nicht identisch verschwindet; auf die Abänderungen, welche im Falle $N = 0$ eintreten, kommen wir später zurück.

Wir untersuchen zunächst, ob eine Funktion V von x, y, z, p, q vorhanden ist, deren Differential dV infolge

der Differentialgleichungen (31) des einen Charakteristikensystems verschwindet. Setzt man

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}\,dx + \frac{\partial V}{\partial y}\,dy + \frac{\partial V}{\partial z}\,dz + \frac{\partial V}{\partial p}\,dp + \frac{\partial V}{\partial q}\,dq$$

und drückt man vermittels der Gleichungen (31) dz, dp, dq durch dx, dy aus, so müssen die Koeffizienten von dx und dy verschwinden, so daß sich für V die beiden linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung ergeben:

$$(46)\qquad \begin{cases} A(V) = \dfrac{\partial V}{\partial x} + p\,\dfrac{\partial V}{\partial z} - \dfrac{L}{N}\,\dfrac{\partial V}{\partial p} - \dfrac{\lambda_2}{N}\,\dfrac{\partial V}{\partial q} = 0\,, \\[2ex] B(V) = \dfrac{\partial V}{\partial y} + q\,\dfrac{\partial V}{\partial z} - \dfrac{\lambda_1}{N}\,\dfrac{\partial V}{\partial p} - \dfrac{H}{N}\,\dfrac{\partial V}{\partial q} = 0\,. \end{cases}$$

Nach dem in § 5 dargestellten Verfahren erkennt man, ob das System (46) gar keine Lösung besitzt, oder ob eine, zwei oder drei unabhängige Lösungen vorhanden sind. Das System (46) besitzt nur dann drei unabhängige Lösungen, wenn es vollständig ist, d. h. wenn die Gleichung

$$A(B(V)) - B(A(V)) = 0$$

oder

$$(47)\qquad \begin{cases} (A(q) - B(p))\,\dfrac{\partial V}{\partial z} + \left|B\left(\dfrac{L}{N}\right) - A\left(\dfrac{\lambda_1}{N}\right)\right|\dfrac{\partial V}{\partial p} \\[2ex] \qquad + \left|B\left(\dfrac{\lambda_2}{N}\right) - A\left(\dfrac{H}{N}\right)\right|\dfrac{\partial V}{\partial q} = 0 \end{cases}$$

eine Folge der Gleichungen (46) ist.

Die Gleichung (47), welche weder $\dfrac{\partial V}{\partial x}$ noch $\dfrac{\partial V}{\partial y}$ enthält, kann nur dann infolge der Gleichungen (46) erfüllt sein, wenn sie identisch erfüllt, wenn also

$$(48)\qquad \begin{cases} A(q) - B(p) = \dfrac{\lambda_1 - \lambda_2}{N} = 0\,, \\[2ex] B\left(\dfrac{L}{N}\right) - A\left(\dfrac{\lambda_1}{N}\right) = 0\,, \\[2ex] B\left(\dfrac{\lambda_2}{N}\right) - A\left(\dfrac{H}{N}\right) = 0 \end{cases}$$

ist. Nur wenn $\lambda_1 = \lambda_2 = -K$ ist, wenn also die beiden Systeme von Charakteristiken zusammenfallen, können drei unabhängige Funktionen V vorhanden sein.

Sind λ_1 und λ_2 voneinander verschieden, so entspricht dem ersten Charakteristikensystem das System linearer partieller Differentialgleichungen (46), dem zweiten Charakteristikensystem das System linearer partieller Differentialgleichungen

$$
(46')\quad \begin{cases} A'(V) = \dfrac{\partial V}{\partial x} + p\dfrac{\partial V}{\partial z} - \dfrac{L}{N}\dfrac{\partial V}{\partial p} - \dfrac{\lambda_1}{N}\dfrac{\partial V}{\partial q} = 0\,, \\ B'(V) = \dfrac{\partial V}{\partial y} + q\dfrac{\partial V}{\partial z} - \dfrac{\lambda_2}{N}\dfrac{\partial V}{\partial p} - \dfrac{H}{N}\dfrac{\partial V}{\partial q} = 0\,. \end{cases}
$$

Wir heben den Satz hervor:

Verschwindet dV infolge der Differentialgleichungen der Charakteristiken des ersten bzw. zweiten Systems, so genügt $V = V(x, y, z, p, q)$ den Differentialgleichungen (46) bzw. (46′).

Ist V eine beliebige Lösung des Systems (46), V' eine beliebige Lösung des Systems (46′), so ist

$$
(49)\qquad [V, V'] = 0\,,
$$

wenn man die in § 17 eingeführte Bezeichnung benutzt:

$$
\begin{aligned}
[V, V'] = {} & \frac{\partial V}{\partial p}\left(\frac{\partial V'}{\partial x} + p\frac{\partial V'}{\partial z}\right) - \frac{\partial V'}{\partial p}\left(\frac{\partial V}{\partial x} + p\frac{\partial V}{\partial z}\right) \\
& + \frac{\partial V}{\partial q}\left(\frac{\partial V'}{\partial y} + q\frac{\partial V'}{\partial z}\right) - \frac{\partial V'}{\partial q}\left(\frac{\partial V}{\partial y} + q\frac{\partial V}{\partial z}\right).
\end{aligned}
$$

Man sieht nämlich, daß der Ausdruck $[V, V']$ identisch verschwindet, wenn man vermittels der Gleichungen (46)

$$
\frac{\partial V}{\partial x} + p\frac{\partial V}{\partial z}\,, \quad \frac{\partial V}{\partial y} + q\frac{\partial V}{\partial z} \quad \text{durch} \quad \frac{\partial V}{\partial p}\,, \quad \frac{\partial V}{\partial q}
$$

und vermittels der Gleichungen (46′)

$$
\frac{\partial V'}{\partial x} + p\frac{\partial V'}{\partial z}\,, \quad \frac{\partial V'}{\partial y} + q\frac{\partial V'}{\partial z} \quad \text{durch} \quad \frac{\partial V'}{\partial p}\,, \quad \frac{\partial V'}{\partial q}
$$

ausdrückt. Nennt man zwei Funktionen u, v von x, y, z, p, q, welche die Bedingung $[u, v] = 0$ erfüllen, involutorisch, so kann man sagen: eine beliebige Lösung V

von (46) und eine beliebige Lösung V' von (46') sind involutorisch. Im Falle $\lambda_1 = \lambda_2$, in welchem das System (46') mit dem System (46) zusammenfällt, sind zwei beliebige Lösungen des Systems (46) involutorisch.

Sind V_1 und V_2 Lösungen des Systems (46) oder (46'), so ist auch

$$\Phi(V_1, V_2),$$

wo Φ eine willkürliche Funktion darstellt, eine solche Lösung.

Die Gleichung

$$V(x, y, z, p, q) = \text{konst.} \tag{50}$$

wird ein **Zwischenintegral** der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung (C) genannt, wenn sämtliche Integrale der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung (50) (allenfalls von den singulären Integralen abgesehen) der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung genügen.

Die Gleichung (50) ist dann und nur dann ein Zwischenintegral der partiellen Differentialgleichung (C), wenn V dem System (46) oder dem System (46') genügt.

Zum Beweise beachten wir, daß jedes nicht singuläre Integral der Differentialgleichung erster Ordnung (50)

$$V(x, y, z, p, q) = \text{konst.}$$

aus ∞^1 ihrer Charakteristiken besteht, deren Differentialgleichungen lauten:

$$\left\{\begin{aligned} & dx : dy : dz : dp : dq \\ & = \frac{\partial V}{\partial p} : \frac{\partial V}{\partial q} : p\frac{\partial V}{\partial p} + q\frac{\partial V}{\partial q} : -\left(\frac{\partial V}{\partial x} + p\frac{\partial V}{\partial z}\right) : -\left(\frac{\partial V}{\partial y} + q\frac{\partial V}{\partial z}\right) \end{aligned}\right. \tag{51}$$

Das eine Charakteristikensystem der partiellen Differentialgleichung (C) hat die Differentialgleichungen (32)

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0,$$

$$N\,dp + L\,dx + \lambda_2\,dy = 0,$$

$$N\,dq + \lambda_1\,dx + H\,dy = 0.$$

Das System (46) wird erhalten, indem man in den beiden letzten Gleichungen (32) für $dx : dy : dp : dq$ die aus (51)

entnommenen Werte setzt. Die Gleichungen (46) sagen also aus, daß sämtliche Charakteristiken der Differentialgleichung $V =$ konst. dem einen Charakteristikensystem der Differentialgleichung zweiter Ordnung angehören.

Ist (50) ein Zwischenintegral, so ist jede Integralfläche von $V =$ konst., die aus ∞^1 Charakteristiken (51) besteht, eine Integralfläche von (C), sie setzt sich also aus ∞^1 Charakteristiken (31) oder (32) der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung zusammen. Da alle Charakteristiken (51) den Charakteristiken (32) oder den Charakteristiken (31) angehören*), so ist entweder das System (46) oder das System (46') befriedigt.

Ist umgekehrt das System (46) befriedigt, gehören also sämtliche Charakteristiken (51) den Charakteristiken des zweiten Systems an, so besteht jede Integralfläche von $V =$ konst. aus ∞^1 Charakteristiken (51), also auch aus ∞^1 Charakteristiken (32); sie ist also auch eine Integralfläche der Differentialgleichung zweiter Ordnung (S. 125).

Ist in der Differentialgleichung (C) $N = 0$, liegt also die Differentialgleichung

$$(C') \qquad H r + 2 K s + L t + M = 0$$

vor, so können, wenn H von Null verschieden ist und λ_1, λ_2 die Wurzeln der quadratischen Gleichung (33)

$$H \lambda^2 - 2 K \lambda + L = 0$$

sind, die Differentialgleichungen (34) des ersten Charakteristikensystems in der Form geschrieben werden:

$$(52) \qquad \begin{cases} dy = \lambda_1\, dx\,, \\ dz = (p + \lambda_1\, q)\, dx\,, \\ dp + \lambda_2\, dq + \dfrac{M}{H}\, dx = 0\,; \end{cases}$$

die Differentialgleichungen des zweiten Charakteristikensystems gehen hieraus durch Vertauschung von λ_1 und λ_2 hervor.

---

*) Jede Charakteristik (51) gehört unendlich vielen Integralflächen von (50), also auch von (C) an; sie ist folglich auch eine Charakteristik von (C).

Soll dV infolge der Gleichungen (52) verschwinden, so müssen in

$$\frac{\partial V}{\partial x}\,dx + \frac{\partial V}{\partial y}\,dy + \frac{\partial V}{\partial z}\,dz + \frac{\partial V}{\partial p}\,dp + \frac{\partial V}{\partial q}\,dq\,,$$

wenn man nach (52) dy, dz, dp durch dx, dq ersetzt, die Koeffizienten von dx und dq verschwinden; V muß also den beiden linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$(53)\quad \begin{cases} A(V) = \dfrac{\partial V}{\partial x} + \lambda_1 \dfrac{\partial V}{\partial y} + (p + \lambda_1 q)\dfrac{\partial V}{\partial z} - \dfrac{M}{H}\dfrac{\partial V}{\partial p} = 0\,, \\[2ex] B(V) = \dfrac{\partial V}{\partial q} - \lambda_2 \dfrac{\partial V}{\partial p} = 0 \end{cases}$$

genügen, welche an die Stelle von (46) treten. An die Stelle von (46′) treten die Gleichungen

$$(53')\quad \begin{cases} A'(V) = \dfrac{\partial V}{\partial x} + \lambda_2 \dfrac{\partial V}{\partial y} + (p + \lambda_2 q)\dfrac{\partial V}{\partial z} - \dfrac{M}{H}\dfrac{\partial V}{\partial p} = 0\,, \\[2ex] B'(V) = \dfrac{\partial V}{\partial q} - \lambda_1 \dfrac{\partial V}{\partial p} = 0\,. \end{cases}$$

Die bisher für den Fall eines nicht verschwindenden N aufgestellten Sätze gelten auch für $N = 0$, wie man erkennt, wenn man die bisherigen Entwicklungen in abgeänderter Form wiederholt.

Wir wenden uns nun zur Betrachtung von Fällen, in welchen die Differentialgleichung (C) integriert oder auf eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung zurückgeführt werden kann.

Zunächst sei $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Besitzen die linearen Differentialgleichungen (46) zwei unabhängige Integrale V_1, V_2, so ist, wenn Φ eine willkürliche Funktion darstellt, auch

$$\Phi(V_1\,,\, V_2)$$

ein Integral. Demnach ist auch

$$V_1 - \varphi(V_2) = 0\,,$$

wo φ eine willkürliche Funktion bezeichnet, ein Zwischenintegral der partiellen Differentialgleichung (C). Die Integration der Differentialgleichung zweiter Ordnung ist

demnach auf die Integration der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung

$$V_1 - \varphi(V_2) = 0 \tag{54}$$

zurückgeführt. Wird eine Integralfläche der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung gesucht, welche den Streifen

$$x = f_1(u), \quad y = f_2(u), \quad z = f_3(u), \quad p = f_4(u), \quad q = f_5(u)$$

enthält, so muß die Gleichung (54) befriedigt werden, wenn man für $x, \ldots, q$ die angegebenen Funktionen von u setzt. Dadurch gehen V_1, V_2 in Funktionen $V_1(u)$, $V_2(u)$ über, und die Funktion φ bestimmt sich aus der Gleichung

$$V_1(u) = \varphi(V_2(u)) .$$

Hat das System (46) die beiden unabhängigen Integrale V_1, V_2 und das System (46′) die beiden unabhängigen Integrale V_3, V_4, so hat die Differentialgleichung (C), wenn unter φ und ψ willkürliche Funktionen verstanden werden, die beiden Zwischenintegrale

$$V_1 - \varphi(V_2) = 0 , \quad V_3 - \psi(V_4) = 0 . \tag{55}$$

Es ist

$$[V_1 - \varphi(V_2), \ V_3 - \psi(V_4)] = 0 ; \tag{56}$$

die Gleichungen (55) bilden also ein Involutionssystem, welches man nach § 17 integrieren kann. Berechnet man aus den Gleichungen (55) p und q als Funktionen von x, y, z, so ist

$$\frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx} ,$$

so daß die Gleichung

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

vollständig integrierbar ist.

Bilden die beiden Gleichungen (46) ein vollständiges System, was, wie wir gesehen haben, nur im Falle $\lambda_1 = \lambda_2$ möglich ist, so besitzen sie drei Integrale V_1, V_2, V_3, zwischen welchen die Beziehungen

$$[V_1, V_2] = 0 , \quad [V_1, V_3] = 0 , \quad [V_2, V_3] = 0 \tag{57}$$

bestehen. Sind φ und ψ willkürliche Funktionen, so ist auch

(58) $$[V_1 - \varphi(V_3)\,,\; V_2 - \psi(V_3)] = 0\,,$$

so daß die beiden Gleichungen

(59) $$V_1 = \varphi(V_3)\,, \quad V_2 = \psi(V_3)$$

ein Involutionssystem bilden. Das allgemeine Integral dieses Systems, welches eine willkürliche Konstante c enthält, wird durch die Gleichungen

(60) $$V_3 = c\,, \quad V_1 = \varphi(c)\,, \quad V_2 = \psi(c)$$

dargestellt; denn berechnet man aus diesen drei Gleichungen z, p, q als Funktionen von x, y, so sind die Gleichungen (59) erfüllt, und wegen (57) ist nach § 17

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p\,, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = q\,.$$

Wir nehmen an, durch Elimination von p, q aus den Gleichungen (60) ergebe sich die Flächenschar

(61) $$\Phi(x, y, z\,;\, c, \varphi(c), \psi(c)) = 0\,.$$

Die Einhüllende dieser Flächenschar, welche man durch Elimination von c aus der Gleichung (61) und der Gleichung

(62) $$\frac{\partial \Phi}{\partial c} + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi(c)}\,\varphi'(c) + \frac{\partial \Phi}{\partial \psi(c)}\,\psi'(c) = 0$$

erhält, genügt der Differentialgleichung (C), deren allgemeines Integral sie darstellt, da sie zwei willkürliche Funktionen φ, ψ enthält.

Beispiel. Es seien die Flächen zu bestimmen, welche von den zur yz-Ebene parallelen Ebenen in Krümmungslinien geschnitten werden.

Die Krümmungslinien einer Fläche $z = \Phi(x, y)$ genügen der Differentialgleichung*)

(a) $$\left\{\begin{aligned} &[p\,q\,r - s(1+p^2)]\,dx^2 + [r(1+q^2) - t(1+p^2)]\,dx\,dy \\ &\qquad + [s(1+q^2) - p\,q\,t]\,dy^2 = 0\,. \end{aligned}\right.$$

*) V. u. K. Kommerell, Raumkurven und Flächen, Bd. I (Samml. Schubert XXIX), S. 93.

Die Bedingung dafür, daß in den Ebenen $x =$ konst. Krümmungslinien liegen, erhält man, indem man in (a) $dx = 0$ setzt, in Form der partiellen Differentialgleichung

(b) $$s(1 + q^2) - p\,q\,t = 0\,.$$

Die Gleichung (b) geht aus (C′) hervor, indem man

$$H = 0\,,\quad 2K = 1 + q^2\,,\quad L = -p\,q\,,\quad M = 0$$

setzt. Die Differentialgleichungen (36) und (37) der beiden Systeme von Charakteristiken schreiben sich jetzt

(c) $$\begin{cases} (1 + q^2)\,dy + p\,q\,dx = 0\,, \\ \hfill dq = 0\,, \\ dz - p\,dx - q\,dy = 0 \end{cases}$$

und

(d) $$\begin{cases} \hfill dx = 0\,, \\ (1 + q^2)\,dp - p\,q\,dq = 0\,, \\ \hfill dz - q\,dy = 0\,. \end{cases}$$

Die Ausdrücke

$$dq\,,\quad d(y + q\,z)$$

verschwinden infolge der Gleichungen (c) und die Ausdrücke

$$dx\,,\quad d\left(\frac{p^2}{1 + q^2}\right)$$

infolge der Gleichungen (d). Die Differentialgleichung (b) besitzt also die beiden Zwischenintegrale

(e) $$\frac{p^2}{1 + q^2} = \varphi'^2(x)\ {}^{*)},\qquad y + q\,z = \psi(q)\,,$$

wo φ und ψ willkürliche Funktionen sind. Die Gleichung

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

geht, wenn man darin nach (e)

(f) $$p = \sqrt{1 + q^2}\cdot\varphi'(x)\,,\quad y = \psi(q) - q\,z$$

setzt, in

$$dz = \sqrt{1 + q^2}\cdot\varphi'(x)\,dx + q\,\psi'(q)\,dq - q^2\,dz - q\,z\,dq$$

*) Statt $\varphi(x)$ schreiben wir $\varphi'^2(x)$.

oder

$$d(z\sqrt{1+q^2}) - \frac{q\,\psi'(q)\,dq}{\sqrt{1+q^2}} - \varphi'(x)\,dx = 0$$

über. Hieraus folgt

$$\text{(g)} \qquad z\sqrt{1+q^2} = \int \frac{q\,\psi'(q)\,dq}{\sqrt{1+q^2}} + \varphi(x)\,.$$

Wir führen an Stelle von q eine neue Veränderliche α ein, indem wir setzen:

$$\frac{q}{\sqrt{1+q^2}} = \alpha\,, \qquad q = \frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}$$

und

$$\psi(q) = \theta'(\alpha)\,.$$

Dadurch geht (g) über in

$$\text{(h)} \qquad \frac{z}{\sqrt{1-\alpha^2}} = \varphi(x) + \alpha\,\theta'(\alpha) - \theta(\alpha)\,,$$

während die zweite Gleichung (f) die Form annimmt:

$$\text{(i)} \qquad y + \frac{\alpha z}{\sqrt{1-\alpha^2}} = \theta'(\alpha)\,.$$

Durch Elimination von α aus den Gleichungen (h) und (i) erhält man die Gleichung der gesuchten Flächen.

Beispiel. Die Flächen, deren sämtliche Punkte parabolisch sind, genügen der Differentialgleichung

$$(\text{A}) \qquad r\,t - s^2 = 0\ ^{*)},$$

welche aus (C) dadurch hervorgeht, daß man

$$H = K = L = M = 0\,, \quad N = 1$$

setzt.

Die Gleichung (30) hat die Wurzeln $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$; die Charakteristikensysteme (31) und (32) fallen zusammen in

$$dp = 0\,, \quad dq = 0\,, \quad dz - p\,dx - q\,dy = 0$$

oder

$$dp = 0\,, \quad dq = 0\,, \quad d(z - px - qy) = 0\,.$$

*) Samml. Schubert XXIX, S. 100.

Unter Einführung der willkürlichen Funktionen φ und ψ hat man die beiden Zwischenintegrale

$$(\beta) \qquad q = \varphi(p)\,, \quad z - p\,x - q\,y = \psi(p)\,.$$

Das Involutionssystem (β) hat das Integral

$$p = c\,, \quad q = \varphi(c)\,, \quad z - c\,x - \varphi(c)\,y - \psi(c) = 0$$

mit der willkürlichen Konstanten c. Die Einhüllende der Ebenenschar

$$z - c\,x - \varphi(c)\,y - \psi(c) = 0\,,$$

welche man durch Elimination von c aus dieser Gleichung und der Gleichung

$$x + y\,\varphi'(c) + \psi'(c) = 0$$

erhält, stellt eine abwickelbare Fläche dar.

§ 25. Die Differentialgleichung der Minimalflächen.

Eine Minimalfläche*) ist durch die Eigenschaft charakterisiert, daß in jedem ihrer Punkte die Summe der Hauptkrümmungsradien verschwindet. Diese Eigenschaft drückt sich durch die Differentialgleichung

$$(63) \qquad (1 + q^2)\,r - 2\,p\,q\,s + (1 + p^2)\,t = 0$$

aus, welche zwar die Form (C′) hat, aber nach der in § 24 dargestellten Methode nicht integriert werden kann. Wir integrieren die Differentialgleichung (63) nach einer Methode von Ampère.

Nach (33), (34), (35) sind, wenn man

$$w = \sqrt{1 + p^2 + q^2}$$

setzt, die Differentialgleichungen der beiden Systeme von Charakteristiken:

$$(64) \qquad \begin{cases} dz - p\,dx - q\,dy = 0\,, \\[2mm] dy + \dfrac{p\,q - i\,w}{1 + q^2}\,dx = 0\,, \\[2mm] dp - \dfrac{p\,q + i\,w}{1 + q^2}\,dq = 0 \end{cases}$$

*) Vgl. V. u. K. Kommerell, Raumkurven und Flächen. Bd. II (Samml. Schubert XLIV), S. 125.

und

$$
(65)\qquad \left\{\begin{aligned}
& dz - p\,dx - q\,dy = 0\,,\\
& dy + \frac{p\,q + i\,w}{1+q^2}\,dx = 0\,,\\
& dp - \frac{p\,q - i\,w}{1+q^2}\,dq = 0\,.
\end{aligned}\right.
$$

Die letzte Gleichung (64), die sich in der Form

$$
d\left(\frac{p\,q + i\,w}{1+q^2}\right) = 0
$$

schreiben läßt, besitzt das Integral

$$
\frac{p\,q + i\,w}{1+q^2} = \text{konst.};
$$

das Integral der letzten Gleichung des Systems (65) ist

$$
\frac{p\,q - i\,w}{1+q^2} = \text{konst.}
$$

Wir kennen nur je eine Funktion, deren Differential infolge der Gleichungen (64) bzw. (65) verschwindet, und können also die bisherige Methode zur Berechnung eines Zwischenintegrals mit einer willkürlichen Funktion nicht anwenden.

Wir drücken x, y, z durch die beiden unabhängigen Veränderlichen

$$
(66)\qquad \alpha = \frac{p\,q + i\,w}{1+q^2}\,, \qquad \beta = \frac{p\,q - i\,w}{1+q^2}
$$

aus, so daß für das erste Charakteristikensystem α und für das zweite β konstant ist. Die Differentialgleichungen der Charakteristiken lassen sich nun folgendermaßen schreiben:

$$
(67)\qquad \left\{\begin{aligned}
& \frac{\partial z}{\partial \beta} - p\,\frac{\partial x}{\partial \beta} - q\,\frac{\partial y}{\partial \beta} = 0\,,\\
& \frac{\partial y}{\partial \beta} + \beta\,\frac{\partial x}{\partial \beta} = 0\,, \qquad\qquad (\alpha \text{ konstant})\\
& p\,q + i\,w - \alpha(1+q^2) = 0
\end{aligned}\right.
$$

und

$$(68) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial \alpha} - p\dfrac{\partial x}{\partial \alpha} - q\dfrac{\partial y}{\partial \alpha} = 0\,, \\ \dfrac{\partial y}{\partial \alpha} + \alpha\dfrac{\partial x}{\partial \alpha} = 0\,, \\ p\,q - i\,w - \beta(1 + q^2) = 0\,. \end{cases} \qquad (\beta \text{ konstant})$$

Die Koordinaten x, y, z eines Punktes einer Integralfläche*) und die zugehörigen Werte von p, q müssen den sämtlichen sechs Gleichungen (67) und (68) genügen, worin α und β als veränderlich angesehen werden. Für x, y, z hat man die Differentialgleichungen

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha} + \alpha\frac{\partial x}{\partial \alpha} = 0\,,$$

$$\frac{\partial y}{\partial \beta} + \beta\frac{\partial x}{\partial \beta} = 0\,;$$

differentiiert man die erste dieser beiden Gleichungen nach β und die zweite nach α, so erhält man

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \alpha\,\partial \beta} + \alpha\frac{\partial^2 x}{\partial \alpha\,\partial \beta} = 0\,,$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \alpha\,\partial \beta} + \beta\frac{\partial^2 x}{\partial \alpha\,\partial \beta} = 0$$

oder

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \alpha\,\partial \beta} = 0\,.$$

Hiernach ist

$$x = \varphi'(\alpha) + \psi'(\beta)\,,$$

wo $\varphi(\alpha)$ und $\psi(\beta)$ willkürliche Funktionen darstellen. Nun ist

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha} = -\alpha\,\varphi''(\alpha)\,, \qquad \frac{\partial y}{\partial \beta} = -\beta\,\psi''(\beta)\,,$$

also

$$y = \varphi(\alpha) - \alpha\,\varphi'(\alpha) + \psi(\beta) - \beta\,\psi'(\beta)\,.$$

*) Die Integralfläche enthält (§ 23) ∞^1 Charakteristiken eines jeden der beiden Systeme.

Die Gleichung

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

geht, wenn man für p und q die aus der letzten Gleichung (67) und (68) berechneten Werte

$$p = i\,\frac{\beta\sqrt{\alpha^2+1} - \alpha\sqrt{\beta^2+1}}{\beta-\alpha}\,, \qquad q = i\,\frac{\sqrt{\alpha^2+1} - \sqrt{\beta^2+1}}{\beta-\alpha}$$

setzt, über in

$$dz = i\sqrt{\alpha^2+1}\,\varphi''(\alpha)\,d\alpha + i\sqrt{\beta^2+1}\,\psi''(\beta)\,d\beta\,;$$

die Integration ergibt

$$z = i\int\sqrt{\alpha^2+1}\,\varphi''(\alpha)\,d\alpha + i\int\sqrt{\beta^2+1}\,\psi''(\beta)\,d\beta\,.$$

Die Differentialgleichung (63) hat also das Integral

$$(69)\quad \begin{cases} x = \varphi'(\alpha) + \psi'(\beta)\,, \\ y = \varphi(\alpha) - \alpha\,\varphi'(\alpha) + \psi(\beta) - \beta\,\psi'(\beta)\,, \\ z = i\int\sqrt{\alpha^2+1}\,\varphi''(\alpha)\,d\alpha + i\int\sqrt{\beta^2+1}\,\psi''(\beta)\,d\beta\,. \end{cases}$$

§ 26. Die lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung.

Einen speziellen Fall der Monge-Ampèreschen Gleichung bildet die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(\mathrm{I})\quad \begin{cases} A\,\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2B\,\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + C\,\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} \\ \qquad + D\,\dfrac{\partial z}{\partial x} + E\,\dfrac{\partial z}{\partial y} + Fz = 0\,, \end{cases}$$

deren Koeffizienten $A, \ldots, F$ nur von x, y abhängen. Wenn man an Stelle von x, y neue unabhängige Veränderliche ξ, η einführt, geht die Gleichung (I) über in

$$(70)\quad \begin{cases} A'\,\dfrac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + 2B'\,\dfrac{\partial^2 z}{\partial \xi\,\partial \eta} + C'\,\dfrac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} \\ \qquad + D'\,\dfrac{\partial z}{\partial \xi} + E'\,\dfrac{\partial z}{\partial \eta} + Fz = 0\,, \end{cases}$$

wobei $A', \ldots, E', F$ als Funktionen von ξ, η aufzufassen sind; es ist

$$
(71)\quad \begin{cases}
A' = A\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + C\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2, \\
B' = A\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + B\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + C\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}, \\
C' = A\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + C\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2, \\
D' = A\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 \xi}{\partial x\,\partial y} + C\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + D\frac{\partial \xi}{\partial x} + E\frac{\partial \xi}{\partial y}, \\
E' = A\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 \eta}{\partial x\,\partial y} + C\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} + D\frac{\partial \eta}{\partial x} + E\frac{\partial \eta}{\partial y}.
\end{cases}
$$

Sind $B^2 - AC$ und A von Null verschieden, so hat die quadratische Gleichung

$$
(72)\qquad A\lambda^2 - 2B\lambda + C = 0
$$

zwei verschiedene Wurzeln λ_1, λ_2, und es besteht die Zerlegung

$$
Au^2 + 2Buv + Cv^2 = A(u + \lambda_1 v)(u + \lambda_2 v).
$$

Die partielle Differentialgleichung

$$
(73)\qquad A\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + C\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 = 0
$$

zerfällt also in die beiden Gleichungen

$$
\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \lambda_1\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0
$$

mit der Lösung $\varphi = \xi(x, y)$ und

$$
\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \lambda_2\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0
$$

mit der Lösung $\varphi = \eta(x, y)$. Dann ist

$$
\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}
$$

von Null verschieden, so daß wir ξ, η als neue unabhängige Veränderliche einführen können. Es ist jetzt $A' = 0$, $C' = 0$, aber

$$2B' = A\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} + \lambda_1 \frac{\partial \eta}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial \xi}{\partial y}\right) \text{*)}$$

von Null verschieden; dividiert man die transformierte Gleichung durch $2B'$, so erhält sie die Form

$$\text{(E)} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \, \partial \eta} + a \frac{\partial z}{\partial \xi} + b \frac{\partial z}{\partial \eta} + cz = 0,$$

wo a, b, c Funktionen von ξ, η sind. — Ist $A = 0$, aber C von Null verschieden, so erhält man dasselbe Resultat, indem man die Rolle von x und y vertauscht. Im Falle $A = 0$, $C = 0$ hat die Differentialgleichung von vornherein die Form (E).

Ist $B^2 - AC = 0$ und A von Null verschieden, so können wir setzen:

$$Au^2 + 2Buv + Cv^2 = A(u + \lambda v)^2;$$

es ist also

$$A' = A\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2,$$

$$B' = A\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \xi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \eta}{\partial y}\right),$$

$$C' = A\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2.$$

Versteht man unter $\varphi = \eta(x, y)$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0,$$

unter $\xi(x, y)$ eine Funktion, welche dieser Differentialgleichung nicht genügt, so ist $B' = 0$, $C' = 0$, während

*) Auf der rechten Seite steht zunächst das weitere Glied

$$A\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \lambda_1 \frac{\partial \xi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial \eta}{\partial y}\right),$$

welches bei der getroffenen Wahl von ξ und η verschwindet.

A' von Null verschieden ist. Die Differentialgleichung hat also die Form

$$\text{(F)} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + a \frac{\partial z}{\partial \xi} + b \frac{\partial z}{\partial \eta} + c z = 0 ,$$

wo a, b, c Funktionen von ξ, η sind. — A und C können nicht gleichzeitig verschwinden, weil dann auch B verschwinden müßte.

Durch Transformation der unabhängigen Veränderlichen x, y läßt sich die lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\text{(D)} \quad A \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + D \frac{\partial z}{\partial x} + E \frac{\partial z}{\partial y} + F z = 0$$

auf die Form

$$\text{(E)} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} + c z = 0$$

oder auf die Form

$$\text{(F)} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} + c z = 0$$

bringen, je nachdem $B^2 - AC$ von Null verschieden oder gleich Null ist.

Wir beschäftigen uns im Folgenden nur mit der Form (E).

Die lineare Differentialgleichung

$$\text{(D)} \qquad A r + 2 B s + C t + D p + E q + F z = 0$$

geht aus der Monge-Ampèreschen Gleichung (C′) hervor, indem man

$$H = A , \quad K = B , \quad L = C , \quad M = D p + E q + F z$$

setzt. Die Charakteristiken erster Ordnung der Differentialgleichung (D) haben nach S. 120 die Differentialgleichungen

$$\text{(74)} \qquad A\, dy^2 - 2 B\, dx\, dy + C\, dx^2 = 0 ,$$

$$\text{(75)} \quad A\, dp\, dy + C\, dq\, dx + (D p + E q + F z)\, dx\, dy = 0 ,$$

$$\text{(76)} \qquad dz = p\, dx + q\, dy .$$

Da die Gleichung (74) nur x, y enthält, so kann sie unabhängig von den übrigen Gleichungen integriert werden.

Wenn wir uns die Raumkurven, welche die Träger der charakteristischen Streifen erster Ordnung bilden, auf die xy-Ebene projiziert denken, erscheinen als Projektionen ebene Kurven, welche der Gleichung (74) genügen.

In der Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen (D) werden die Kurven in der xy-Ebene, welche der gewöhnlichen Differentialgleichung (74)

$$A\,dy^2 - 2B\,dx\,dy + C\,dx^2 = 0$$

genügen, als Charakteristiken bezeichnet.

Ist φ eine Funktion von x, y, welche der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung (73)

$$A\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + 2B\,\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,\frac{\partial\varphi}{\partial y} + C\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 = 0$$

genügt, so stellt die Gleichung

$$\varphi(x, y) = \text{konst.}$$

eine Charakteristik dar; denn längs der durch diese Gleichung dargestellten Kurve ist

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,dy = 0$$

oder

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} : \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -dy : dx\,;$$

mit der Gleichung (73) ist also auch die Gleichung (74) erfüllt.

Im Falle $B^2 - AC > 0$ haben wir oben die Gleichung (73) in die beiden Gleichungen

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \lambda_1\,\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0$$

und

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \lambda_2\,\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0$$

zerlegt und als neue Veränderliche eine Lösung $\xi = \xi(x, y)$ der ersten und eine Lösung $\eta = \eta(x, y)$ der zweiten Gleichung eingeführt; die Kurven $\xi =$ konst. und $\eta =$ konst. sind die Charakteristiken.

Im Falle $B^2 - AC = 0$ ließ sich die Gleichung (73) durch eine Gleichung

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$$

ersetzen; die eine neue Veränderliche $\eta = \eta(x, y)$ war eine Lösung dieser Gleichung; die Charakteristiken sind jetzt die Kurven $\eta =$ konst.

Die Differentialgleichung

$$\text{(E)} \qquad s + ap + bq + cz = 0\,,$$

wo a, b, c Funktionen von x, y sind, geht aus der Gleichung (C′) hervor, indem man

$$H = L = 0\,, \quad 2K = 1\,, \quad M = ap + bq + cz$$

setzt. Die beiden Systeme von Charakteristiken haben die Differentialgleichungen

$$\text{(77)} \quad dx = 0\,, \quad dp + (ap + bq + cz)\,dy = 0\,, \quad dz = q\,dy$$

und

$$\text{(78)} \quad dy = 0\,, \quad dq + (ap + bq + cz)\,dx = 0\,, \quad dz = p\,dx\,.$$

Damit $dV(x, y, z, p, q)$ infolge der Differentialgleichungen (77) des ersten Charakteristikensystems verschwindet, muß

$$\text{(79)} \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial V}{\partial q} = 0\,, \\ &\frac{\partial V}{\partial y} + q\frac{\partial V}{\partial z} - (ap + bq + cz)\frac{\partial V}{\partial p} = 0 \end{aligned} \right.$$

sein. Besitzen die beiden linearen partiellen Differentialgleichungen (79) außer $V = x$ eine weitere davon unabhängige Lösung, so muß diese wegen der ersten Gleichung (79) von q unabhängig sein. Soll

$$V = f(x, y, z, p)$$

der zweiten Gleichung (79) genügen, so muß

$$\text{(80)} \qquad \left\{ \begin{aligned} &A(V) = \frac{\partial V}{\partial y} - (ap + cz)\frac{\partial V}{\partial p} = 0\,, \\ &B(V) = \frac{\partial V}{\partial z} - b\frac{\partial V}{\partial p} = 0 \end{aligned} \right.$$

sein. Diese beiden Differentialgleichungen, in welchen wir x als Parameter, y, z, p als unabhängige Veränderliche auffassen, besitzen nur dann eine gemeinsame Lösung V, wenn

$$A(B(V)) - B(A(V))$$

identisch verschwindet, d. h. wenn

$$\frac{\partial b}{\partial y} + ab - c = 0 \tag{81}$$

ist. Dann besitzt das System (80) die beiden unabhängigen Lösungen

$$x, \quad f(x, y, z, p),$$

und die Differentialgleichung (E) hat das Zwischenintegral

$$f(x, y, z, p) = \varphi(x), \tag{82}$$

wo φ eine willkürliche Funktion darstellt.

Ebenso findet man, daß ein Zwischenintegral der Gleichung (E) von der Form

$$f(x, y, z, q) = \psi(y) \tag{83}$$

mit der willkürlichen Funktion ψ vorhanden ist, wenn

$$\frac{\partial a}{\partial x} + ab - c = 0 \tag{84}$$

ist.

§ 27. Methode von Laplace*).

Wir setzen

$$\left\{\begin{aligned} h &= \frac{\partial a}{\partial x} + ab - c, \\ k &= \frac{\partial b}{\partial y} + ab - c. \end{aligned}\right. \tag{85}$$

Die Gleichung (E) schreibt sich in der Form

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y} + az\right) + b\left(\frac{\partial z}{\partial y} + az\right) - hz = 0$$

*) Vgl. Darboux, Théorie générale des surfaces, Bd. II, S. 23 ff. (außer den genannten Werken von Goursat und Forsyth).

oder, wenn

$$z_1 = \frac{\partial z}{\partial y} + a z \tag{86}$$

gesetzt wird, in der Form

$$\frac{\partial z_1}{\partial x} + b z_1 - h z = 0 \,. \tag{87}$$

Ist $h = 0$, so hat man die Gleichung

$$\frac{\partial z_1}{\partial x} + b z_1 = 0$$

mit dem Integral

$$z_1 = Y e^{-\int b\,dx} ,$$

wo Y eine willkürliche Funktion von y darstellt. Zur Bestimmung von z hat man jetzt die Gleichung

$$\frac{\partial z}{\partial y} + a z = Y e^{-\int b\,dx} ;$$

aus dieser linearen Differentialgleichung erster Ordnung mit der unabhängigen Veränderlichen y berechnet man

$$z = e^{-\int a\,dy}\left[X + \int Y e^{\int (a\,dy - b\,dx)}\,dy\right] , \tag{88}$$

wo X eine willkürliche Funktion von x darstellt. Im Falle $h = 0$ läßt sich also die Gleichung (E) durch Quadraturen integrieren.

Ähnlich findet man, wenn $k = 0$ ist,

$$z = e^{-\int b\,dx}\left[Y + \int X e^{\int (b\,dx - a\,dy)}\,dx\right] , \tag{89}$$

wo X eine willkürliche Funktion von x und Y eine willkürliche Funktion von y darstellt.

Wir setzen jetzt h von Null verschieden voraus. Wenn man z aus den Gleichungen (86) und (87) eliminiert, erhält man für z_1 die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\,\partial y} + a_1 \frac{\partial z_1}{\partial x} + b_1 \frac{\partial z_1}{\partial y} + c_1 z_1 = 0 \,. \tag{90}$$

wo gesetzt ist:

$$(91)\qquad \begin{cases} a_1 = a - \dfrac{\partial \log h}{\partial y}, \\ b_1 = b, \\ c_1 = c - \dfrac{\partial a}{\partial x} + \dfrac{\partial b}{\partial y} - b\dfrac{\partial \log h}{\partial y}. \end{cases}$$

Aus einer Lösung z der ursprünglichen Gleichung (E) ergibt sich vermöge (86) eine Lösung z_1 der Gleichung (90); umgekehrt folgt aus einer Lösung z_1 der Differentialgleichung (90) vermöge (86) die Lösung

$$z = \frac{\dfrac{\partial z_1}{\partial x} + b z_1}{h}$$

der ursprünglichen Gleichung (E). Die Integration der Gleichung (90) und die Integration der Gleichung (E) sind also äquivalente Aufgaben. Setzt man

$$(92)\qquad \begin{cases} h_1 = \dfrac{\partial a_1}{\partial x} + a_1 b_1 - c_1, \\ k_1 = \dfrac{\partial b_1}{\partial y} + a_1 b_1 - c_1, \end{cases}$$

so ist

$$(93)\qquad \begin{cases} h_1 = 2h - k - \dfrac{\partial^2 \log h}{\partial x\, \partial y}, \\ k_1 = h. \end{cases}$$

Wenn man

$$(86')\qquad z_{-1} = \frac{\partial z}{\partial x} + b z$$

setzt, nimmt die Differentialgleichung (E) die Form

$$(87')\qquad \frac{\partial z_{-1}}{\partial y} + a z_{-1} - k z = 0$$

an. Durch Elimination von z erhält man für z_{-1} die Differentialgleichung

$$(90')\qquad \frac{\partial^2 z_{-1}}{\partial x\, \partial y} + a_{-1}\frac{\partial z_{-1}}{\partial x} + b_{-1}\frac{\partial z_{-1}}{\partial y} + c_{-1} z_{-1} = 0,$$

wo

$$(91') \qquad \begin{cases} a_{-1} = a\,, \\[4pt] b_{-1} = b - \dfrac{\partial \log k}{\partial x}\,, \\[8pt] c_{-1} = c - \dfrac{\partial b}{\partial y} + \dfrac{\partial a}{\partial x} - a\,\dfrac{\partial \log k}{\partial x} \end{cases}$$

ist. Wenn man

$$(92') \qquad \begin{cases} h_{-1} = \dfrac{\partial a_{-1}}{\partial x} + a_{-1} b_{-1} - c_{-1}\,, \\[8pt] k_{-1} = \dfrac{\partial b_{-1}}{\partial y} + a_{-1} b_{-1} - c_{-1} \end{cases}$$

setzt, so ist

$$(93') \qquad \begin{cases} h_{-1} = k\,, \\[4pt] k_{-1} = 2k - h - \dfrac{\partial^2 \log k}{\partial x\,\partial y}\,. \end{cases}$$

Die Größen h und k sind von Darboux als Invarianten der Differentialgleichung (E) bezeichnet worden.

Die Substitution

$$z = \lambda(x\,,\,y) \cdot z'$$

führt die Differentialgleichung (E) über in die Gleichung

$$(94) \qquad \frac{\partial^2 z'}{\partial x\,\partial y} + a'\,\frac{\partial z'}{\partial x} + b'\,\frac{\partial z'}{\partial y} + c' z = 0$$

mit den Koeffizienten

$$(95) \qquad \begin{cases} a' = a + \dfrac{\partial \log \lambda}{\partial y}\,, \\[8pt] b' = b + \dfrac{\partial \log \lambda}{\partial x}\,, \\[8pt] c' = c + a\,\dfrac{\partial \log \lambda}{\partial x} + b\,\dfrac{\partial \log \lambda}{\partial y} + \dfrac{1}{\lambda}\,\dfrac{\partial^2 \lambda}{\partial x\,\partial y} \end{cases}$$

und den Invarianten

$$(96) \qquad \begin{cases} h' = \dfrac{\partial a'}{\partial x} + a'b' - c' = h\,, \\[8pt] k' = \dfrac{\partial b'}{\partial y} + a'b' - c' = k\,. \end{cases}$$

Die Invarianten von (94) stimmen also mit denjenigen von (E) überein.

Wir zeigen auch umgekehrt, daß sich zwei Gleichungen (E) und (94) mit denselben Invarianten durch eine Substitution $z = \lambda z'$ ineinander überführen lassen. Wenn nämlich die Gleichungen (96)

$$\frac{\partial a'}{\partial x} + a'b' - c' = \frac{\partial a}{\partial x} + ab - c\,,$$

$$\frac{\partial b'}{\partial y} + a'b' - c' = \frac{\partial b}{\partial y} + ab - c$$

bestehen, so ist

$$\frac{\partial a'}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial x} = \frac{\partial b'}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial y}\,;$$

wenn man

$$\frac{\partial \log\lambda}{\partial y} = a' - a\,, \qquad \frac{\partial \log\lambda}{\partial x} = b' - b$$

setzt, so ist die Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{\partial \log\lambda}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\,\frac{\partial \log\lambda}{\partial x}$$

erfüllt, und man hat

$$\lambda = e^{\int[(b'-b)\,dx + (a'-a)\,dy]}\,; \tag{97}$$

dieser Wert von λ genügt nicht nur den beiden ersten Gleichungen (95), sondern, wie man durch Nachrechnen zeigt, auch der dritten, so daß die Gleichungen (E) und (94) durch die Substitution $z = \lambda z'$ zusammenhängen. Wenn man zwei lineare Gleichungen, welche durch eine Substitution von der Form $z = \lambda z'$ auseinander hervorgehen, als voneinander nicht verschieden ansieht, so ist eine lineare Differentialgleichung von der Form (E) durch ihre Invarianten bestimmt.

Die Differentialgleichungen (E), (90), (90′), die von z, z_1, z_{-1} befriedigt werden, haben bzw. die Invarianten h, k; h_1, k_1; h_{-1}, k_{-1}, welche durch die Gleichungen (93)

und (93′) verknüpft sind. Wenn man auf die Differentialgleichung (90) für z_1 die Transformation

$$z' = \frac{\partial z_1}{\partial x} + b\, z_1$$

anwendet, erhält man, da wegen (87)

$$z' = h\, z$$

ist, eine Gleichung, welche als von (E) nicht verschieden zu betrachten ist. Ebenso erhält man, wenn man die Substitution

$$z' = \frac{\partial z_{-1}}{\partial y} + a\, z_{-1}$$

auf die Differentialgleichung (90′) für z_{-1} anwendet, wegen $z' = k\, z$ [vgl. Gleichung (87′)] eine Differentialgleichung, welche von der Gleichung (E) für z nicht verschieden ist.

Setzt man

$$(86'') \qquad z_i = \frac{\partial z_{i-1}}{\partial y} + a\, z_{i-1} \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

und

$$(86''') \qquad z_{-i} = \frac{\partial z_{-(i-1)}}{\partial x} + b\, z_{-(i-1)}, \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

so hat man die Differentialgleichung

$$(90'') \qquad \frac{\partial^2 z_i}{\partial x\, \partial y} + a_i \frac{\partial z_i}{\partial x} + b_i \frac{\partial z_i}{\partial y} + c_i z_i = 0$$

mit den Invarianten h_i, k_i und die Differentialgleichung

$$(90''') \qquad \frac{\partial^2 z_{-i}}{\partial x\, \partial y} + a_{-i} \frac{\partial z_{-i}}{\partial x} + b_{-i} \frac{\partial z_{-i}}{\partial y} + c_{-i} z_{-i} = 0$$

mit den Invarianten h_{-i}, k_{-i}, und zwar ist

$$(93'') \qquad \begin{cases} h_i = 2\, h_{i-1} - k_{i-1} - \dfrac{\partial^2 \log h_{i-1}}{\partial x\, \partial y}, \\ k_i = h_{i-1} \end{cases}$$

und

$$(93''') \qquad \begin{cases} h_{-i} = k_{-(i-1)}, \\ k_{-i} = 2\, k_{-(i-1)} - h_{-(i-1)} - \dfrac{\partial^2 \log k_{-(i-1)}}{\partial x\, \partial y}. \end{cases}$$

Wir haben gesehen, daß eine Differentialgleichung (E) mit einer verschwindenden Invariante durch Quadraturen integrierbar ist und daß dies auch für die Differentialgleichungen gilt, welche aus (E) durch eine der Substitutionen (86) und (86′) erhalten werden. Ist nun unter den Differentialgleichungen für die Funktionen $z, z_1, z_2, \ldots$ eine Gleichung mit einer verschwindenden Invariante vorhanden und ist die Differentialgleichung für z_i die erste derartige Gleichung, so ist $h_i = 0$ *); dann läßt sich aber z_i und damit auch $z_{i-1}, \ldots, z_1, z$ durch Quadraturen darstellen. Wenn sich unter den Differentialgleichungen für $z, z_{-1}, z_{-2}, \ldots$ eine mit einer verschwindenden Invariante befindet und dies zuerst bei der Gleichung für z_{-i} zutrifft, so ist $k_{-i} = 0$; dann läßt sich z_{-i} und schließlich auch z durch Quadraturen berechnen.

Beispiel. Die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + \frac{1}{x-y}\left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$$

hat die Invarianten

$$h = k = -\frac{2}{(x-y)^2}.$$

Durch die Substitution

$$z_1 = \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{z}{x-y}$$

erhält man die Gleichung

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\,\partial y} - \frac{1}{x-y}\left(\frac{\partial z_1}{\partial x} + \frac{\partial z_1}{\partial y}\right) + \frac{2 z_1}{(x-y)^2} = 0$$

mit den Invarianten

$$h_1 = 0, \quad k_1 = h$$

und mit dem Integral

$$z_1 = \frac{2\varphi(x) + \int \varphi_1(y)\,(x-y)^2\,dy}{x-y}.$$

*) Wäre $k_i = 0$, so hätte wegen $k_i = h_{i-1}$ schon die Differentialgleichung für z_{i-1} eine verschwindende Invariante.

wo $\varphi(x)$ und $\varphi_1(y)$ willkürliche Funktionen sind. Wenn man $\varphi_1(y) = \psi'''(y)$ setzt, kann man die Quadratur ausführen; man erhält

$$z_1 = 2\,\frac{\varphi(x) + \psi(y)}{x - y} + 2\,\psi'(y) + (x - y)\,\psi''(y)\,.$$

Daraus folgt das Integral der ursprünglichen Gleichung

$$z = (x - y)\,(\psi'(y) - \varphi'(x)) + 2\,\varphi(x) + 2\,\psi(y)\,,$$

wo $\varphi(x)$ und $\psi(y)$ willkürliche Funktionen sind.

Bemerkung. Während sich die Integration einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung stets auf die Integration eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen zurückführen läßt (§ 11), konnten wir die Zurückführung partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung auf gewöhnliche Differentialgleichungen in §§ 23—27 nur unter besonderen Bedingungen vornehmen. Eine umfassendere Methode zur Integration partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welche denselben Zweck verfolgt, aber auch nur bedingungsweise erreicht, rührt von Darboux her. In betreff der Darbouxschen Methode, von deren Darstellung wir aus Mangel an Raum absehen, sei auf eine Abhandlung von Darboux*) und auf die S. 92 angeführten Lehrbücher**) verwiesen.

---

*) Ann. de l'Éc. norm., 1870, S. 163 ff.; Anhang III zur deutschen Ausgabe des auf S. 36 zitierten Buches von Mansion.

**) Goursat (Kap. 6, 7); Forsyth (Kap. 18).

IV. Abschnitt.

Lineare partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung, insbesondere hyperbolische Differentialgleichungen*).

§ 28. Charakteristiken und Normalformen der linearen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung.

Wir betrachten im folgenden die lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(A)\qquad \begin{cases} A\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2B\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + C\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} \\ \qquad + D\dfrac{\partial z}{\partial x} + E\dfrac{\partial z}{\partial y} + Fz = 0, \end{cases}$$

deren Koeffizienten $A, \ldots, F$ in einem gewissen Gebiet der xy-Ebene stetige Funktionen der reellen Veränderlichen x, y sind. Während bisher die auftretenden Größen komplex sein durften und die Funktionen als analytisch vorausgesetzt wurden, setzen wir im folgenden**), soweit nichts anderes erwähnt wird, alle Größen als **reell** voraus; von den auftretenden Funktionen geben wir jedesmal an, welche Bedingungen sie in Hinsicht auf Stetigkeit und Differentiierbarkeit erfüllen sollen.

Wir führen zunächst die **Charakteristiken** der Differentialgleichung (A) unabhängig von den früheren Untersuchungen (§ 26) ein.

Längs einer in der xy-Ebene gegebenen Kurve $\mathfrak{C}$ seien die Werte von z, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ vorgeschrieben. Wenn sich

*) Vgl. Enzyklopädie der math. Wiss. II A. 7 c (**Sommerfeld**) zu diesem und zum VII. Abschnitt.

**) In den Abschnitten IV—VIII.

x, y beim Fortschreiten längs der Kurve $\mathfrak{C}$ um dx bzw. dy ändern, müssen die vorgeschriebenen Werte die Bedingung erfüllen:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy\,.$$

Wenn eine Lösung z von (A) vorhanden ist, welche nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung längs $\mathfrak{C}$ die vorgegebenen Werte annimmt, so müssen die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung in einem Punkt von $\mathfrak{C}$ den folgenden drei Gleichungen genügen:

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} d\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,dx + \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\,dy\,,\\ d\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\,dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,dy\,,\\ A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} &+ C\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + D\frac{\partial z}{\partial x} + E\frac{\partial z}{\partial y} + Fz = 0\,. \end{aligned}\right.$$

Es ergeben sich hieraus bestimmte endliche Werte für die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung, wenn die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} dx, & dy, & 0 \\ 0, & dx, & dy \\ A, & 2B, & C \end{vmatrix} = A\,dy^2 - 2B\,dx\,dy + C\,dx^2$$

von Null verschieden ist. Ist jedoch längs der Kurve $\mathfrak{C}$ $\Delta = 0$, so sind die zur Bestimmung der partiellen Ableitungen zweiter Ordnung dienenden Gleichungen (1) entweder nicht verträglich oder nicht unabhängig.

Die der Gleichung

$$(2)\qquad A\,dy^2 - 2B\,dx\,dy + C\,dx^2 = 0$$

genügenden Kurven in der xy-Ebene bilden die Charakteristiken der linearen partiellen Differentialgleichung (A).

Die Gleichung (2) läßt sich, je nachdem in einem gewissen Gebiete der xy-Ebene $B^2 - AC$ positiv oder negativ ist, auf reellem oder imaginärem Wege in zwei in bezug auf dx, dy lineare Gleichungen zerlegen. Es gibt also zwei Scharen von reellen oder imaginären Charakteristiken;

durch einen Punkt des betreffenden Gebietes geht eine Charakteristik jeder der beiden Scharen. Im Falle $B^2 - AC = 0$ ist A das Quadrat eines in dx, dy linearen reellen Ausdrucks; es ist eine einzige Schar von Charakteristiken vorhanden.

Die Differentialgleichung (A) heißt in einem gewissen Gebiete der xy-Ebene hyperbolisch, elliptisch oder parabolisch, je nachdem in diesem Gebiete $B^2 - AC$ positiv, negativ oder gleich Null ist.

Unter Benutzung dieser Ausdrucksweise können wir sagen:

Eine hyperbolische Differentialgleichung besitzt zwei Scharen reeller, eine elliptische zwei Scharen imaginärer Charakteristiken; bei einer parabolischen Differentialgleichung ist nur eine Schar reeller Charakteristiken vorhanden.

Ist $B^2 - AC \gtrless 0$, so hat die Gleichung (vgl. § 26)

$$A\lambda^2 - 2B\lambda + C = 0 \tag{3}$$

zwei verschiedene, reelle oder konjugiert komplexe Wurzeln λ_1, λ_2; ist

$$\xi(x, y) = \text{konst.}$$

das allgemeine Integral der Gleichung

$$dy - \lambda_1 dx = 0$$

und

$$\eta(x, y) = \text{konst.}$$

das allgemeine Integral der Gleichung

$$dy - \lambda_2 dx = 0,$$

so können die Funktionen $\xi(x, y)$ und $\eta(x, y)$ reell oder konjugiert komplex angenommen werden.

Durch die Substitution

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y)$$

geht die Gleichung (A) nach § 26 in

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} + a\frac{\partial z}{\partial \xi} + b\frac{\partial z}{\partial \eta} + cz = 0 \tag{4}$$

über, freilich nur dann auf reellem Wege, wenn $B^2 - AC > 0$ ist.

Im Falle $B^2 - AC < 0$ führen wir vermöge der Gleichungen

$$\xi = \mathfrak{x} + i\mathfrak{y}, \quad \eta = \mathfrak{x} - i\mathfrak{y}$$

an Stelle von ξ, η die reellen Veränderlichen $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ ein. Jetzt sind in der Formel (70) des III. Abschnitts die Koeffizienten B' und F reell, während D' und E' konjugiert komplex sind; in der Gleichung (4) sind also a und b konjugiert komplex, c reell. Führt man die reellen Funktionen

$$\mathfrak{a} = 2(a + b), \quad \mathfrak{b} = 2i(b - a), \quad \mathfrak{c} = 4c$$

der reellen Veränderlichen $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ ein, so erhält man die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \mathfrak{x}^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \mathfrak{y}^2} + \mathfrak{a}\frac{\partial z}{\partial \mathfrak{x}} + \mathfrak{b}\frac{\partial z}{\partial \mathfrak{y}} + \mathfrak{c} z = 0. \tag{5}$$

Ist $B^2 - AC = 0$, so hat die quadratische Gleichung (3) die Doppelwurzel λ; ist

$$\eta(x, y) = \text{konst.},$$

wo $\eta(x, y)$ reell ist, das allgemeine Integral von

$$dy - \lambda\, dx = 0$$

und $\xi(x, y)$ eine von $\eta(x, y)$ unabhängige reelle Funktion, so geht die Differentialgleichung (A) auf reellem Wege in

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + a\frac{\partial z}{\partial \xi} + b\frac{\partial z}{\partial \eta} + cz = 0 \tag{6}$$

über. Jetzt ist nur die eine Charakteristikenschar $\eta =$ konst. vorhanden.

Wir müssen also den auf S. 142 ausgesprochenen Satz, wenn wir nur reelle Größen zulassen, durch den folgenden ersetzen:

Die Differentialgleichung

$$\begin{cases} A\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2B\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + C\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} \\ \qquad + D\dfrac{\partial z}{\partial x} + E\dfrac{\partial z}{\partial y} + Fz = 0 \end{cases} \tag{A}$$

läßt sich durch eine reelle Transformation der unabhängigen Veränderlichen auf eine der drei

folgenden Formen bringen, je nachdem sie hyperbolisch, elliptisch oder parabolisch ist:

$$(A_1)\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0\,,$$

$$(A_2)\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0\,,$$

$$(A_3)\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0\,.$$

Für die drei Normalformen (A_1), (A_2), (A_3) schreibt sich die Differentialgleichung (2) der Charakteristiken bzw.

$$(2_1)\qquad dx\,dy = 0\,,$$

$$(2_2)\qquad dx^2 + dy^2 = (dx + i\,dy)\,(dx - i\,dy) = 0\,,$$

$$(2_3)\qquad dy^2 = 0\,.$$

Die hyperbolische Differentialgleichung (A_1) hat als Charakteristiken die Parallelen $x =$ konst. und $y =$ konst. zu den Achsen; die elliptische Differentialgleichung (A_2) hat die imaginären Charakteristiken $x + iy =$ konst. und $x - iy =$ konst.; die Charakteristiken der parabolischen Differentialgleichung (A_3) sind die Parallelen $y =$ konst. zur x-Achse.

§ 29. Der Greensche Satz.

Der Greensche Satz der Potentialtheorie läßt sich auf die lineare partielle Differentialgleichung (A) übertragen und bietet in dieser abgeänderten Form ein wichtiges Hilfsmittel zur Untersuchung der Integrale einer solchen Differentialgleichung.

In der xy-Ebene sei ein von einer geschlossenen Kurve C begrenztes Flächenstück J gegeben; P und Q seien Funktionen von x, y, welche nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung im Innern und auf der Begrenzung der Fläche J stetig sind. Wir betrachten das über die Fläche J erstreckte Doppelintegral

$$\iint\limits_J \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dx\,dy\,,$$

welches sich, wie wir zeigen wollen, auf ein einfaches Integral zurückführen läßt.

Wir nehmen an, daß die Abszisse x eines Punktes der Randkurve C zwischen a_1 und $a_2 > a_1$ variiert und daß eine zur y-Achse gezogene Parallele, welche einer Abszisse x zwischen den angegebenen Grenzen entspricht, die Kurve C in zwei Punkten mit den Ordinaten y_1 und $y_2 > y_1$ schneidet (die Annahme nur zweier Schnittpunkte, die lediglich zur Vereinfachung der Darstellung gemacht wird, ist nicht wesentlich). Dann ist

$$\iint_J \frac{\partial Q}{\partial y}\, dx\, dy = \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial Q}{\partial y}\, dy$$

$$= \int_{a_1}^{a_2} [Q(x, y_2) - Q(x, y_1)]\, dx\,.$$

Das über die Randkurve C im positiven Sinne erstreckte Integral

$$\int_C Q\, dx$$

ist gleich

$$\int_{a_1}^{a_2} [Q(x, y_1) - Q(x, y_2)]\, dx\,;$$

denn beim Durchlaufen der Kurve C im positiven Sinne nimmt x im Punkte (x, y_1) zu, im Punkte (x, y_2) ab. Wir haben also

$$\iint_J \frac{\partial Q}{\partial y}\, dx\, dy = -\int_C Q\, dx\,.$$

Entsprechend findet man

$$\iint_J \frac{\partial P}{\partial x}\, dx\, dy = \int_C P\, dy\,.$$

Demnach ist

$$\iint_J \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dx\, dy = \int_C (P\, dy - Q\, dx)\,. \tag{7}$$

Dem linearen Differentialausdruck zweiter Ordnung

$$(8)\qquad \begin{cases} L(u) = A\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + C\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \qquad\qquad\qquad + D\dfrac{\partial u}{\partial x} + E\dfrac{\partial u}{\partial y} + F u\,, \end{cases}$$

dessen Koeffizienten $A, \ldots, F$ in einem gewissen Gebiet der xy-Ebene nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetig sind, ordnen wir einen anderen linearen Differentialausdruck zweiter Ordnung

$$(9)\qquad \begin{cases} M(v) = \dfrac{\partial^2(Av)}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2(Bv)}{\partial x\,\partial y} + \dfrac{\partial^2(Cv)}{\partial y^2} \\ \qquad\qquad\qquad - \dfrac{\partial(Dv)}{\partial x} - \dfrac{\partial(Ev)}{\partial y} + Fv \end{cases}$$

zu, welchen man als den zu $L(u)$ **adjungierten Differentialausdruck** bezeichnet. $M(v) = 0$ ist die zu $L(u) = 0$ adjungierte Differentialgleichung.

Durch Addition der Gleichungen

$$\begin{aligned}
&Av\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u\frac{\partial^2(Av)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[Av\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial(Av)}{\partial x}\right],\\
&Bv\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} - u\frac{\partial^2(Bv)}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[Bv\frac{\partial u}{\partial x}\right] - \frac{\partial}{\partial x}\left[u\frac{\partial(Bv)}{\partial y}\right],\\
&Bv\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} - u\frac{\partial^2(Bv)}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left[Bv\frac{\partial u}{\partial y}\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left[u\frac{\partial(Bv)}{\partial x}\right],\\
&Cv\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - u\frac{\partial^2(Cv)}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left[Cv\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial(Cv)}{\partial y}\right],\\
&Dv\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial(Dv)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[Duv]\,,\\
&Ev\frac{\partial u}{\partial y} + u\frac{\partial(Ev)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}[Euv]\,,\\
&Fvu - uFv = 0
\end{aligned}$$

erhält man die Identität

$$(10)\qquad vL(u) - uM(v) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\,.$$

wobei gesetzt ist:

$$(11)\quad \begin{cases} P = A v \dfrac{\partial u}{\partial x} - u \dfrac{\partial (A v)}{\partial x} + B v \dfrac{\partial u}{\partial y} - u \dfrac{\partial (B v)}{\partial y} + D u v \,, \\ Q = B v \dfrac{\partial u}{\partial x} - u \dfrac{\partial (B v)}{\partial x} + C v \dfrac{\partial u}{\partial y} - u \dfrac{\partial (C v)}{\partial y} + E u v \,. \end{cases}$$

Wir verstehen unter u und v zwei Funktionen von x, y, welche nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetig sind*), und betrachten das Doppelintegral

$$\iint\limits_J (v\, L(u) - u\, M(v))\, dx\, dy = \iint\limits_J \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dx\, dy \,,$$

erstreckt über ein einfach zusammenhängendes Flächenstück J der xy-Ebene mit der Begrenzungslinie C. Da nach (7)

$$\iint\limits_J \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dx\, dy = \int\limits_C (P\, dy - Q\, dx)$$

ist, wo das einfache Integral auf der rechten Seite über den Rand C des Gebietes J im positiven Sinne erstreckt wird, so besteht die Gleichung

$$(12)\qquad \iint\limits_J (v\, L(u) - u\, M(v))\, dx\, dy = \int\limits_C (P\, dy - Q\, dx) \,,$$

welche wir als G r e e n s c h e n Satz bezeichnen**).

---

*) Im Falle $A = 0$, $C = 0$ braucht nur die Stetigkeit der beiden partiellen Ableitungen zweiter Ordnung $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial y}$ vorausgesetzt zu werden, da die übrigen partiellen Ableitungen zweiter Ordnung nicht vorkommen.

**) Die Formel (12), angewandt auf die Differentialgleichung

$$L(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \,,$$

ergibt den G r e e n s c h e n Satz der Theorie des logarithmischen Potentials (vgl. § 50).

Genügt v der adjungierten Differentialgleichung $M(v) = 0$, so ist

$$(13) \qquad \iint\limits_J v\, L(u)\, dx\, dy = \int\limits_C (P\, dy - Q\, dx)\,;$$

ist u eine Lösung der vorgelegten Differentialgleichung $L(u) = 0$, v eine Lösung der adjungierten Differentialgleichung $M(v) = 0$, so hat man, wenn die obigen Stetigkeitsbedingungen erfüllt sind:

$$(14) \qquad \int\limits_C (P\, dy - Q\, dx) = 0\,.$$

Wir heben den Hauptsatz noch einmal hervor.

Ist $M(v)$ der zu $L(u)$ adjungierte Differentialausdruck und sind P, Q die Ausdrücke (11), so ist (12)

$$\iint\limits_J (v\, L(u) - u\, M(v))\, dx\, dy = \int\limits_C (P\, dy - Q\, dx)\,;$$

dabei sind u, v zwei beliebige Funktionen von x, y, welche ebenso wie die Koeffizienten von $L(u)$ nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung im Innern und am Rande des von der Kurve C begrenzten Flächenstücks J stetig sind.

Stimmt $M(u)$ mit $L(u)$ überein, so heißt $L(u)$ ein sich selbst adjungierter Differentialausdruck.

Um die allgemeine Form eines solchen Differentialausdrucks zu finden, schreiben wir

$$\begin{aligned} M(u) = {} & A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ & + \left(2\frac{\partial A}{\partial x} + 2\frac{\partial B}{\partial y} - D\right)\frac{\partial u}{\partial x} \\ & + \left(2\frac{\partial B}{\partial x} + 2\frac{\partial C}{\partial y} - E\right)\frac{\partial u}{\partial y} \\ & + \left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 B}{\partial x\, \partial y} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} - \frac{\partial D}{\partial x} - \frac{\partial E}{\partial y} + F\right) u\,. \end{aligned}$$

Damit $M(u) = L(u)$ wird, ist das Bestehen der beiden folgenden Gleichungen notwendig und hinreichend:

$$D = \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y},$$

$$E = \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y}.$$

Dann hat man den allgemeinsten sich selbst adjungierten Differentialausdruck:

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} L(u) = {} & \frac{\partial}{\partial x}\left(A\frac{\partial u}{\partial x} + B\frac{\partial u}{\partial y}\right) \\ & + \frac{\partial}{\partial y}\left(B\frac{\partial u}{\partial x} + C\frac{\partial u}{\partial y}\right) + F u. \end{aligned}\right.$$

Durch Addition der Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x}\left(A\frac{\partial v}{\partial x} + B\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(A u\frac{\partial v}{\partial x} + B u\frac{\partial v}{\partial y}\right) - u\frac{\partial}{\partial x}\left(A\frac{\partial v}{\partial x} + B\frac{\partial v}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}\left(B\frac{\partial v}{\partial x} + C\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(B u\frac{\partial v}{\partial x} + C u\frac{\partial v}{\partial y}\right) - u\frac{\partial}{\partial y}\left(B\frac{\partial v}{\partial x} + C\frac{\partial v}{\partial y}\right),$$

$$-F u v = -u \cdot F v$$

erhält man die Identität

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} & A\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + B\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right) + C\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} - F u v \\ & = \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} - u L(v), \end{aligned}\right.$$

wo gesetzt ist:

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} p &= u\left(A\frac{\partial v}{\partial x} + B\frac{\partial v}{\partial y}\right), \\ q &= u\left(B\frac{\partial v}{\partial x} + C\frac{\partial v}{\partial y}\right). \end{aligned}\right.$$

Ist nun wie oben J ein Flächenstück der xy-Ebene mit der Begrenzungslinie C, so ist nach (7)

$$\iint_J \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y}\right) dx\, dy = \int_C (p\, dy - q\, dx) .$$

Diese Formel liefert unter Berücksichtigung von (16) den Satz:

Ist $L(u)$ der sich selbst adjungierte Differentialausdruck (15) und sind p, q die Ausdrücke (17), so ist

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} &\iint_J \left[A \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + B\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right) + C\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} - F u v\right] dx\, dy \\ &\qquad = \int_C (p\, dy - q\, dx) - \iint_J u\, L(v)\, dx\, dy . \end{aligned}\right.$$

Hieraus ergibt sich durch Vertauschung von u und v

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} &\iint_J \left[A \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + B\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right) + C\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} - F u v\right] dx\, dy \\ &\qquad = \int_C (p'\, dy - q'\, dx) - \iint_J v\, L(u)\, dx\, dy , \end{aligned}\right.$$

wo

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} p' &= v\left(A\frac{\partial u}{\partial x} + B\frac{\partial u}{\partial y}\right), \\ q' &= v\left(B\frac{\partial u}{\partial x} + C\frac{\partial u}{\partial y}\right) \end{aligned}\right.$$

ist. Durch Verbindung der Gleichungen (18) und (19) ergibt sich die Gleichung

$$(21)\quad \iint_J [v\, L(u) - u\, L(v)]\, dx\, dy = \int_C (P\, dy - Q\, dx) ,$$

wo

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} P &= p' - p = A\left(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}\right) + B\left(v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y}\right), \\ Q &= q' - q = B\left(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}\right) + C\left(v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y}\right) \end{aligned}\right.$$

ist. Die Gleichung (12) geht, wenn $L(u)$ ein sich selbst adjungierter Differentialausdruck, also $M(v) = L(v)$ ist, in die Gleichung (21) über.

§ 30. Beweis der Existenz der Integrale einer hyperbolischen Differentialgleichung vermittels sukzessiver Annäherung.

Wir beschäftigen uns zunächst mit der hyperbolischen Differentialgleichung

$$\text{(B)} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu = 0 \text{ *)},$$

deren Charakteristiken die Geraden $x =$ konst. und $y =$ konst. sind. Die in § 18 und § 21 gegebenen Beweise für die Existenz der Integrale einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung sind hier, wo die Koeffizienten nicht als analytische Funktionen vorausgesetzt werden, nicht anwendbar; wir bedienen uns jetzt einer Methode sukzessiver Annäherung, und zwar wählen wir im gegenwärtigen Paragraphen ähnliche Anfangsbedingungen wie in § 21, während die im nächsten Paragraphen eingeführten Anfangsbedingungen den in § 18 gewählten entsprechen.

Die Koeffizienten a, b, c der Differentialgleichung (B) seien stetig im Innern und auf dem Rande eines Rechtecks $\mathfrak{R}$, dessen Seiten den Achsen x und y parallel sind, d. h. in dem durch die Bedingungen

$$x_0 \leqq x \leqq x_0 + \alpha\,, \quad y_0 \leqq y \leqq y_0 + \beta$$

definierten Gebiet**). Wir suchen diejenige Lösung der Gleichung (B), welche sich für $y = y_0$ auf $\varphi(x)$ und für $x = x_0$ auf $\psi(y)$ reduziert. Die gegebenen Funktionen $\varphi(x)$, $\psi(y)$ seien nebst den Ableitungen $\varphi'(x)$, $\psi'(y)$ im Intervall $x_0 \ldots x_0 + \alpha$ bzw. $y_0 \ldots y_0 + \beta$ stetig, und es sei $\varphi(x_0) = \psi(y_0)$.

*) Mit elliptischen Differentialgleichungen beschäftigt sich der VII. Abschnitt; mit parabolischen Differentialgleichungen, deren Theorie noch weniger entwickelt ist, beschäftigen wir uns nur so weit, als sie uns im VIII. Abschnitt bei physikalischen Aufgaben begegnen.

**) Die Endpunkte des Rechtecks $\mathfrak{R}$ bezeichnen wir später mit $\mathfrak{A}_0(x_0, y_0)$, $\mathfrak{A}_1(x_0, y_0 + \beta)$, $\mathfrak{A}_2(x_0 + \alpha, y_0)$, $\mathfrak{A}_3(x_0 + \alpha, y_0 + \beta)$.

Wir bilden nun die Differentialgleichungen

$$(23)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\,\partial y} = 0\,,\\ &\frac{\partial^2 u_1}{\partial x\,\partial y} + a\frac{\partial u_0}{\partial x} + b\frac{\partial u_0}{\partial y} + c\,u_0 = 0\,,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &\frac{\partial^2 u_n}{\partial x\,\partial y} + a\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} + b\frac{\partial u_{n-1}}{\partial y} + c\,u_{n-1} = 0\,,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right.$$

Das Integral der ersten Gleichung, welches sich für $y = y_0$ auf $\varphi(x)$ und für $x = x_0$ auf $\psi(y)$ reduziert, ist

$$(24)\qquad u_0 = \varphi(x) + \psi(y) - \varphi(x_0)\,.$$

Die Lösung u_n $(n = 1\,,\,2\,,\,\ldots)$, welche für $x = x_0$ bei beliebigem y und für $y = y_0$ bei beliebigem x verschwindet, ist dargestellt durch

$$(25)\qquad u_n = -\int_{x_0}^{x}\!\!\int_{y_0}^{y}\left(a\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} + b\frac{\partial u_{n-1}}{\partial y} + c\,u_{n-1}\right)dx\,dy\,,$$

so daß

$$(26)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial u_n}{\partial x} &= -\int_{y_0}^{y}\left(a\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} + b\frac{\partial u_{n-1}}{\partial y} + c\,u_{n-1}\right)dy\,,\\ \frac{\partial u_n}{\partial y} &= -\int_{x_0}^{x}\left(a\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} + b\frac{\partial u_{n-1}}{\partial y} + c\,u_{n-1}\right)dx \end{aligned}\right.$$

ist.

Wir werden nachher zeigen, daß die Reihe

$$(27)\qquad u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots,$$

sowie die Reihen

$$(28)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial u_n}{\partial x} + \ldots,\\ &\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial u_1}{\partial y} + \ldots + \frac{\partial u_n}{\partial y} + \ldots \end{aligned}\right.$$

im Rechteck $\Re$ gleichmäßig konvergent sind. Setzt man dies einstweilen voraus, so hat man

$$\begin{aligned} &u_0 + u_1 + \ldots + u_n \\ &= \varphi(x) + \psi(y) - \varphi(x_0) \\ &\quad - \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\left[a\frac{\partial(u_0 + \ldots + u_{n-1})}{\partial x} + b\frac{\partial(u_0 + \ldots + u_{n-1})}{\partial y}\right. \\ &\qquad\qquad \left. + c(u_0 + \ldots + u_{n-1})\right] dx\, dy \end{aligned}$$

und für $\lim n = \infty$, wenn man

$$u = u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots$$

setzt,

$$u = \varphi(x) + \psi(y) - \varphi(x_0) - \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\left(a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + c\,u\right) dx\, dy\,;$$

hieraus folgt durch Differentiation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = -\left(a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + c\,u\right),$$

d. h. die Reihe u stellt eine Lösung der Differentialgleichung (B) dar, welche die angegebenen Bedingungen erfüllt.

Um die Konvergenz der Reihen (27) und (28) zu beweisen, nehmen wir an, es sei im Rechteck $\Re$

$$|a| \leqq H\,, \quad |b| \leqq H\,, \quad |c| \leqq H$$

und

$$|u_0| \leqq M\,, \quad \left|\frac{\partial u_0}{\partial x}\right| \leqq M\,, \quad \left|\frac{\partial u_0}{\partial y}\right| \leqq M\,,$$

wo H und M positive Größen sind. Dann ist

$$\left|a\frac{\partial u_0}{\partial x} + b\frac{\partial u_0}{\partial y} + c\,u_0\right| \leqq 3\,H M\,.$$

Wenn man

$$x - x_0 = \xi\,, \quad y - y_0 = \eta$$

setzt, ergibt sich aus den Formeln (25) und (26) für $n = 1$

$$|u_1| \leqq 3HM\xi\eta\,,$$

$$\left|\frac{\partial u_1}{\partial x}\right| \leqq 3HM\eta\,,$$

$$\left|\frac{\partial u_1}{\partial y}\right| \leqq 3HM\xi\,.$$

Im Rechteck $\mathfrak{R}$ ist $0 \leqq \xi \leqq \alpha$, $0 \leqq \eta \leqq \beta$, also

$$\frac{1}{\xi} + \frac{1}{\eta} \geqq \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$$

oder

$$\frac{\xi\eta}{\xi+\eta} \leqq \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}\,,$$

mithin

$$|u_1| \leqq 3HM\frac{\xi\eta}{\xi+\eta}(\xi+\eta) \leqq 3H\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}M(\xi+\eta)\,.$$

Versteht man unter K eine positive Zahl, welche mindestens gleich $3H$ und mindestens gleich

$$3H\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$$

ist, so ist

$$|u_1| \leqq MK(\xi+\eta)\,;$$

ferner ist

$$\left|\frac{\partial u_1}{\partial x}\right| \leqq 3HM(\xi+\eta)\,, \qquad \left|\frac{\partial u_1}{\partial y}\right| \leqq 3HM(\xi+\eta)$$

oder

$$\left|\frac{\partial u_1}{\partial x}\right| \leqq MK(\xi+\eta)\,, \qquad \left|\frac{\partial u_1}{\partial y}\right| \leqq MK(\xi+\eta)\,.$$

Wir zeigen, daß für jeden Wert von n

$$|u_{n-1}| \leqq \frac{MK^{n-1}(\xi+\eta)^{n-1}}{(n-1)!}$$

ist und daß die absoluten Beträge von $\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x}$ und $\frac{\partial u_{n-1}}{\partial y}$ dieselbe Bedingung erfüllen. Falls dies richtig ist, ist

$$\left| a\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} + b\frac{\partial u_{n-1}}{\partial y} + c\,u_{n-1}\right| \leqq \frac{3\,H\,M\,K^{n-1}(\xi+\eta)^{n-1}}{(n-1)!}$$

und nach (25)

$$|u_n| \leqq \frac{3\,H\,M\,K^{n-1}}{(n-1)!}\int_0^{\xi}\!\!\int_0^{\eta}(\xi+\eta)^{n-1}\,d\xi\,d\eta$$

$$= \frac{3\,H\,M\,K^{n-1}}{n!}\,\frac{(\xi+\eta)^{n+1}-\xi^{n+1}-\eta^{n+1}}{n+1};$$

wie man leicht nachrechnet, ist für positive Werte von ξ und η

$$\frac{(\xi+\eta)^{n+1}-\xi^{n+1}-\eta^{n+1}}{n+1} \leqq \xi\,\eta\,(\xi+\eta)^{n-1}$$

$$= \frac{\xi\,\eta}{\xi+\eta}(\xi+\eta)^n \leqq \frac{\alpha\,\beta}{\alpha+\beta}(\xi+\eta)^n,$$

also

$$|u_n| \leqq \frac{3\,H\,M\,K^{n-1}}{n!}\,\frac{\alpha\,\beta}{\alpha+\beta}(\xi+\eta)^n$$

$$\leqq \frac{M\,K^n(\xi+\eta)^n}{n!}.$$

Ferner ist nach (26)

$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial x}\right| \leqq \frac{3\,H\,M\,K^{n-1}}{(n-1)!}\int_0^{\eta}(\xi+\eta)^{n-1}\,d\eta$$

$$= \frac{3\,H\,M\,K^{n-1}}{n!}[(\xi+\eta)^n-\xi^n]$$

$$\leqq \frac{3\,H\,M\,K^{n-1}(\xi+\eta)^n}{n!} \leqq \frac{M\,K^n(\xi+\eta)^n}{n!};$$

ebenso findet man

$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial y}\right| \leqq \frac{M\,K^n(\xi+\eta)^n}{n!}.$$

Wegen der Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{M K^n (\alpha + \beta)^n}{n!} = M e^{K(\alpha+\beta)}$$

sind die Reihen (27) und (28) für alle dem Rechteck $\mathfrak{R}$ angehörigen Punkte x, y unbedingt und gleichmäßig konvergent, w. z. b. w.

Wir haben also den Satz:

In der Differentialgleichung

$$\text{(B)} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial y} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + c u = 0$$

seien die Koeffizienten a, b, c im Gebiet $\mathfrak{R}$

$$x_0 \leqq x \leqq x_0 + \alpha, \quad y_0 \leqq y \leqq y_0 + \beta$$

stetige Funktionen der reellen Veränderlichen x, y. Die gegebenen Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(y)$ seien nebst ihrer ersten Ableitung für $x_0 \leqq x \leqq x_0 + \alpha$ bzw. für $y_0 \leqq y \leqq y_0 + \beta$ stetig, und es sei $\varphi(x_0) = \psi(y_0)$. Die im Gebiet $\mathfrak{R}$ gleichmäßig konvergente Reihe

$$u = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots,$$

wo

$$u_0 = \varphi(x) + \psi(y) - \varphi(x_0),$$

$$u_n = -\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} \left(a \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} + b \frac{\partial u_{n-1}}{\partial y} + c u_{n-1} \right) dx \, dy$$

$$(n = 1, 2, \ldots)$$

ist, nimmt für $x = x_0$ den Wert $\psi(y)$, für $y = y_0$ den Wert $\varphi(x)$ an und genügt der Differentialgleichung (B).

§ 31. Beweis der Existenz der Integrale; Fortsetzung.

Es sei ein Kurvenbogen $\mathfrak{C}$ gegeben, welcher von keiner Parallelen zur x-Achse und von keiner Parallelen zur y-Achse mehr als einmal geschnitten wird. Längs dieses Bogens seien die Werte von u, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ vorgeschrieben, wobei die Beziehung

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

bestehen muß, wenn sich die Differentiale auf den Fortgang längs der Kurve $\mathfrak{C}$ beziehen. Indem wir uns im Punkte (x, y) der xy-Ebene die dritte Raumkoordinate u errichtet denken, können wir auch sagen: es ist eine Raumkurve (mit der xy-Projektion $\mathfrak{C}$) und in jedem ihrer Punkte eine die Tangente enthaltende Ebene gegeben, oder: es ist ein Streifen von Flächenelementen $\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$ gegeben.

Um die Voraussetzungen genauer zu fassen, bezeichnen wir die Endpunkte der Kurve $\mathfrak{C}$ mit $\mathfrak{A}_1(x_0, y_0 + \beta)$, $\mathfrak{A}_2(x_0 + \alpha, y_0)$ und führen das Rechteck $\mathfrak{R}$ ein, welches von den durch $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ gehenden Charakteristiken (Parallelen zur x- und y-Achse) gebildet wird; die beiden anderen Eckpunkte des Rechtecks sind $\mathfrak{A}_0(x_0, y_0)$ und $\mathfrak{A}_3(x_0+\alpha, y_0+\beta)$. Um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, nehmen wir $\alpha > 0$, $\beta > 0$ an. Wir verstehen unter (x, y) einen beliebigen Punkt in dem von der Kurve $\mathfrak{C}$ und den beiden Charakteristiken $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_3$ und $\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3$ begrenzten Gebiet $\mathfrak{J}$, wir legen durch $A(x, y)$ eine Parallele zur x-Achse, welche die Kurve $\mathfrak{C}$ im Punkt $A_1(x', y)$, und eine Parallele zur y-Achse, welche die Kurve $\mathfrak{C}$ im Punkt $A_2(x, y')$ schneidet; das von diesen beiden Parallelen und der Kurve $\mathfrak{C}$ begrenzte Gebiet heiße J.

Es sei nun eine Funktion $\varphi(x)$ gegeben, welche nebst ihrer Ableitung $\varphi'(x)$ im Intervall $x_0 \leqq x \leqq x_0 + \alpha$ stetig ist, und eine Funktion $\psi(y)$, welche nebst der Ableitung $\psi'(y)$ im Intervall $y_0 \leqq y \leqq y_0 + \beta$ stetig ist. Wir setzen voraus, daß längs der Kurve $\mathfrak{C}$ die Funktion u mit $\varphi(x) + \psi(y)$, die Ableitung $\frac{\partial u}{\partial x}$ mit $\varphi'(x)$ und die Ableitung $\frac{\partial u}{\partial y}$ mit $\psi'(y)$ übereinstimmt.

Wir schreiben wieder die Differentialgleichungen (23) an. Diejenige Lösung der ersten Gleichung (23), welche längs $\mathfrak{C}$ die für u vorgeschriebenen Bedingungen erfüllt, ist

(29) $$u_0 = \varphi(x) + \psi(y)$$

mit den Ableitungen

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} = \varphi'(x),$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial y} = \psi'(y).$$

Die Lösung u_n $(n = 1, 2, \ldots)$, welche nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung längs $\mathfrak{C}$ verschwindet, ist

$$u_n = -\iint_J \left(a \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} + b \frac{\partial u_{n-1}}{\partial y} + c\, u_{n-1}\right) dx\, dy\,, \tag{30}$$

wo die Integration über die oben beschriebene Fläche J zu erstrecken ist; es ist demnach

$$\tag{31} \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u_n}{\partial x} &= -\int_{y'}^{y} \left(a \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} + b \frac{\partial u_{n-1}}{\partial y} + c\, u_{n-1}\right) dy\,, \\ \frac{\partial u_n}{\partial y} &= -\int_{x'}^{x} \left(a \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} + b \frac{\partial u_{n-1}}{\partial y} + c\, u_{n-1}\right) dx\,. \end{aligned} \right.$$

Wenn gezeigt wird, daß die Reihen

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots = u \tag{32}$$

und

$$\tag{33} \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial x} + \cdots\,, \\ &\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \cdots \end{aligned} \right.$$

für alle Punkte (x, y) des Gebietes $\mathfrak{J}$ gleichmäßig konvergieren, ergibt sich wie oben, daß die Funktion u eine Lösung der Differentialgleichung (B) darstellt.

Ist im Rechteck $\mathfrak{R}$

$$|a| \leqq H\,, \quad |b| \leqq H\,, \quad |c| \leqq H\,,$$

$$|u_0| \leqq M\,, \quad \left|\frac{\partial u_0}{\partial x}\right| \leqq M\,, \quad \left|\frac{\partial u_0}{\partial y}\right| \leqq M\,,$$

so ist

$$\left| a \frac{\partial u_0}{\partial x} + b \frac{\partial u_0}{\partial y} + c\, u_0 \right| \leqq 3HM\,.$$

Aus der Formel (30) für $n = 1$ folgt

$$|u_1| \leqq 3HM \iint_J dx\, dy \leqq 3HM(x - x')(y - y')$$

$$\leqq 3HM(x - x_0)(y - y_0) = 3HM\,\xi\eta\,,$$

wenn man

$$\xi = x - x_0, \quad \eta = y - y_0$$

setzt; ferner folgt aus (31) für $n = 1$

$$\left|\frac{\partial u_1}{\partial x}\right| \leqq 3HM(y - y') \leqq 3HM\eta,$$

$$\left|\frac{\partial u_1}{\partial y}\right| \leqq 3HM(x - x') \leqq 3HM\xi.$$

Indem man die Größe K wie in § 30 einführt, findet man, daß im Gebiet $\mathfrak{J}$ die absoluten Beträge von

$$u_1, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial y}$$

höchstens gleich

$$MK(\xi + \eta)$$

sind.

Wenn die absoluten Beträge von

$$u_{n-1}, \quad \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x}, \quad \frac{\partial u_{n-1}}{\partial y}$$

höchstens gleich

$$\frac{MK^{n-1}(\xi + \eta)^{n-1}}{(n-1)!}$$

sind, ist

$$\left|a\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} + b\frac{\partial u_{n-1}}{\partial y} + c\,u_{n-1}\right| \leqq \frac{3HMK^{n-1}(\xi + \eta)^{n-1}}{(n-1)!}$$

und nach (30)

$$|u_n| \leqq \frac{3HMK^{n-1}}{(n-1)!}\iint\limits_J (\xi + \eta)^{n-1}\,dx\,dy\,;$$

nun ist aber

$$\iint\limits_J (\xi + \eta)^{n-1}\,dx\,dy \leqq \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y} (\xi + \eta)^{n-1}\,dx\,dy$$

$$= \int\limits_0^{\xi}\int\limits_0^{\eta} (\xi + \eta)^{n-1}\,d\xi\,d\eta \leqq \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta}\,\frac{(\xi + \eta)^n}{n}$$

wie in § 30, also

$$|u_n| \leqq \frac{M K^n (\xi + \eta)^n}{n!}.$$

Ferner ist nach (31)

$$\left| \frac{\partial u_n}{\partial x} \right| \leqq \frac{3 H M K^{n-1}}{(n-1)!} \int_{y'}^{y} (\xi + \eta)^{n-1} dy ;$$

es ist aber

$$\int_{y'}^{y} (\xi + \eta)^{n-1} dy \leqq \int_{y_0}^{y} (\xi + \eta)^{n-1} dy = \int_{0}^{\eta} (\xi + \eta)^{n-1} d\eta ,$$

also wie in § 30

$$\left| \frac{\partial u_n}{\partial x} \right| \leqq \frac{M K^n (\xi + \eta)^n}{n!}$$

und

$$\left| \frac{\partial u_n}{\partial y} \right| \leqq \frac{M K^n (\xi + \eta)^n}{n!}.$$

Ebenso wie das von der Kurve $\mathfrak{C}$ und den Charakteristiken $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_3$ und $\mathfrak{A}_3 \mathfrak{A}_2$ begrenzte Gebiet kann das Gebiet behandelt werden, welches von der Kurve $\mathfrak{C}$ und den Charakteristiken $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_0$ und $\mathfrak{A}_0 \mathfrak{A}_2$ eingeschlossen wird.

Die Koeffizienten a, b, c der Differentialgleichung

$$\text{(B)} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + c u = 0$$

seien im Rechteck $\mathfrak{R}$

$$x_0 \leqq x \leqq x_0 + \alpha , \quad y_0 \leqq y \leqq y_0 + \beta$$

stetige Funktionen von x, y. Die gegebenen Funktionen $\varphi(x), \psi(y)$ seien nebst den Ableitungen $\varphi'(x), \psi'(y)$ für $x_0 \leqq x \leqq x_0 + \alpha$ bzw. für $y_0 \leqq y \leqq y_0 + \beta$ stetig. Die Kurve $\mathfrak{C}$ verbinde die Eckpunkte $(x_0, y_0 + \beta)$ und $(x_0 + \alpha, y_0)$ des Rechtecks $\mathfrak{R}$ und

werde von keiner Parallelen zur x- oder y-Achse mehr als einmal geschnitten. Setzt man

$$u_0 = \varphi(x) + \psi(y) ,$$

$$u_n = -\iint\limits_J \left(a \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} + b \frac{\partial u_{n-1}}{\partial y} + c\, u_{n-1}\right) dx\, dy$$

$$(n = 1, 2, \ldots) ,$$

wo das Integrationsgebiet J von den durch (x, y) gehenden Parallelen zu den Achsen und der Kurve $\mathfrak{C}$ begrenzt wird, so stellt die im Rechteck $\mathfrak{R}$ gleichmäßig konvergente Reihe

$$u = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$$

eine Lösung der Differentialgleichung (B) dar, welche nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung im Rechteck $\mathfrak{R}$ stetig ist und außerdem die Bedingung erfüllt, daß u, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ längs der Kurve $\mathfrak{C}$ bzw. mit $\varphi(x) + \psi(y)$, $\varphi'(x)$, $\psi'(y)$ übereinstimmen*).

§ 32. Die Riemannsche Integrationsmethode**).

Liegt die hyperbolische Differentialgleichung

$$\text{(B)} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + c\, u = 0$$

vor, so gehen die Formeln (8), (9) und (11) über in

$$\text{(34)} \qquad L(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + c\, u ,$$

*) Zu § 30 und § 31 vgl. Picard (Journ. de Mathém. 1890, S. 166 ff.; Note I zum IV. Bd. von Darboux, Théorie générale des surfaces) und Nicoletti (Atti Napoli, Serie 2, Bd. 8, 1897).

**) Riemann, Über die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite (Werke, 1. Aufl., S. 147). — Darboux, Théorie générale des surfaces, Bd. II, S. 77 ff.

$$(35)\quad \begin{cases} M(v) = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} - \dfrac{\partial (a\,v)}{\partial x} - \dfrac{\partial (b\,v)}{\partial y} + c\,v \\ \quad = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} - a\,\dfrac{\partial v}{\partial x} - b\,\dfrac{\partial v}{\partial y} + \left(c - \dfrac{\partial a}{\partial x} - \dfrac{\partial b}{\partial y}\right) v\,; \end{cases}$$

$$(36)\quad \begin{cases} P = a\,u\,v + \dfrac{1}{2}\left(v\,\dfrac{\partial u}{\partial y} - u\,\dfrac{\partial v}{\partial y}\right) \\ \quad = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{\partial (u\,v)}{\partial y} - u\left(\dfrac{\partial v}{\partial y} - a\,v\right) = -\dfrac{1}{2}\,\dfrac{\partial (u\,v)}{\partial y} + v\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + a\,u\right), \\ Q = b\,u\,v + \dfrac{1}{2}\left(v\,\dfrac{\partial u}{\partial x} - u\,\dfrac{\partial v}{\partial x}\right) \\ \quad = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{\partial (u\,v)}{\partial x} - u\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} - b\,v\right) = -\dfrac{1}{2}\,\dfrac{\partial (u\,v)}{\partial x} + v\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + b\,u\right). \end{cases}$$

In der $x\,y$-Ebene sei eine Kurve $\mathfrak{C}$ gezogen, welche von einer beliebigen Parallelen zur x-Achse und von einer beliebigen Parallelen zur y-Achse nur in einem Punkt geschnitten wird; durch den Punkt A mit den Koordinaten ξ, η legen wir die beiden Charakteristiken, d. h. die Geraden $y = \eta$ und $x = \xi$, welche die Kurve $\mathfrak{C}$ in den Punkten A_1 bzw. A_2 schneiden. Es sei u eine Lösung der Differentialgleichung $L(u) = 0$ und v eine Lösung der adjungierten Differentialgleichung $M(v) = 0$; in dem Gebiete J, welches von der Kurve $\mathfrak{C}$ und den beiden durch A gelegten Charakteristiken begrenzt ist, seien die Funktionen u, v wie auch die Koeffizienten a, b, c der Differentialgleichung nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetig*). Dann ist (14)

$$\int (P\,dy - Q\,dx) = 0\,,$$

wenn das Integral über die Begrenzung des Gebietes J erstreckt wird. Wir schreiben

$$\int_{A_2}^{A} P\,dy + \int_{A_1}^{A} Q\,dx + \int_{A_1}^{A_2} (P\,dy - Q\,dx) = 0\,,$$

*) Wegen $L(u) = 0$, $M(v) = 0$ sind auch $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$ und $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}$ stetig.

wo das letzte Integral über den von den Punkten A_1 und A_2 begrenzten Bogen der Kurve $\mathfrak{C}$ zu erstrecken ist. Unter Beachtung der oben angegebenen Werte von P und Q hat man

$$\int_{A_2}^{A} P\,dy = \int_{A_2}^{A} \left[\frac{1}{2}\frac{\partial(u\,v)}{\partial y} - u\left(\frac{\partial v}{\partial y} - a\,v\right)\right] dy$$

$$= \frac{1}{2}[(u\,v)_A - (u\,v)_{A_2}] - \int_{A_2}^{A} u\left(\frac{\partial v}{\partial y} - a\,v\right) dy\,,$$

$$\int_{A_1}^{A} Q\,dx = \int_{A_1}^{A} \left[\frac{1}{2}\frac{\partial(u\,v)}{\partial x} - u\left(\frac{\partial v}{\partial x} - b\,v\right)\right] dx$$

$$= \frac{1}{2}[(u\,v)_A - (u\,v)_{A_1}] - \int_{A_1}^{A} u\left(\frac{\partial v}{\partial x} - b\,v\right) dx\ ^{*)}.$$

Es ist also

$$(37)\quad \begin{cases} (u\,v)_A = \frac{1}{2}[(u\,v)_{A_1} + (u\,v)_{A_2}] - \int_{A_1}^{A_2}(P\,dy - Q\,dx) \\[2ex] \qquad + \int_{A_1}^{A} u\left(\frac{\partial v}{\partial x} - b\,v\right) dx + \int_{A_2}^{A} u\left(\frac{\partial v}{\partial y} - a\,v\right) dy\,. \end{cases}$$

Wir führen nun nach Riemann eine Funktion $v(x, y; \xi, \eta)$ zweier Variablenpaare x, y und ξ, η ein, welche folgende Bedingungen erfüllt:

1) Im Gebiet J ist $v = v(x, y; \xi, \eta)$ eine nebst den partiellen Ableitungen erster Ordnung stetige Funktion von x, y, welche der adjungierten Differentialgleichung $M(v) = 0$ genügt;

2) längs der Charakteristik $y = \eta$ (d. h. auf $A\,A_1$) ist

$$\frac{\partial v}{\partial x} - b\,v = 0$$

---

*) Unter $(\varphi)_A$ ist der Wert verstanden, welchen die Funktion φ im Punkte A annimmt.

und längs der Charakteristik $x = \xi$ (d. h. auf $A A_2$)

$$\frac{\partial v}{\partial y} - a v = 0 ;$$

3) wenn der Punkt (x, y) mit $A(\xi, \eta)$ zusammenfällt, ist $v = 1$.

Wenn für y der feste Wert η gesetzt und nur x geändert wird, genügt die Funktion $v(x, y; \xi, \eta)$ der Differentialgleichung

$$\frac{\partial v}{\partial x} - b v = 0 ;$$

diejenige Lösung dieser Differentialgleichung, welche für $x = \xi$ den Wert 1 annimmt, ist

$$v = e^{\int_\xi^x b\,dx} ;$$

die Funktion v muß also für $y = \eta$ mit

$$e^{\int_\xi^x b\,dx}$$

übereinstimmen. Ebenso findet man, daß sich die Funktion v für $x = \xi$ auf

$$e^{\int_\eta^y a\,dy}$$

reduzieren muß.

Die Riemannsche Funktion $v(x, y; \xi, \eta)$ kann also definiert werden als diejenige Lösung der Differentialgleichung $M(v) = 0$, welche für $y = \eta$ den Wert

$$e^{\int_\xi^x b\,dx}$$

und für $x = \xi$ den Wert

$$e^{\int_\eta^y a\,dy}$$

annimmt.

Die Existenz einer solchen Lösung ist in § 30 nach der Methode der sukzessiven Annäherung bewiesen worden;

daß nur eine derartige Lösung vorhanden ist, wird sich bald ergeben. Bis dieser Beweis geführt ist, wollen wir unter $v(x, y; \xi, \eta)$ diejenige Lösung der Differentialgleichung $M(v) = 0$ verstehen, welche sich nach der in § 30 dargestellten Methode in Form einer unendlichen Reihe ergibt. In § 33 werden einige spezielle Differentialgleichungen behandelt, für welche sich die Riemannsche Funktion leicht angeben läßt.

Ersetzt man in der Formel (37) v durch die soeben definierte Riemannsche Funktion $v(x, y; \xi, \eta)$, so erhält man, da

$$(u\,v)_A = (u)_A = u(\xi, \eta)$$

ist und die beiden letzten Integrale verschwinden:

$$u(\xi, \eta) = \tfrac{1}{2}\left[(u\,v)_{A_1} + (u\,v)_{A_2}\right] - \int_{A_1}^{A_2} (P\,dy - Q\,dx)\,; \tag{38}$$

dabei ist

$$\left\{\begin{aligned} P &= a\,u\,v + \frac{1}{2}\left(v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y}\right),\\ Q &= b\,u\,v + \frac{1}{2}\left(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}\right). \end{aligned}\right. \tag{39}$$

Wir nehmen nun an, längs des Bogens $A_1 A_2$ der Kurve $\mathfrak{C}$ seien die Werte der Funktion u und ihrer partiellen Ableitungen erster Ordnung $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ als stetige Funktionen gegeben. Da die Gleichung

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$

besteht, wo sich die Differentiale dx, dy, du auf den Fortgang längs der Kurve $\mathfrak{C}$ beziehen, so kennt man, wenn längs $\mathfrak{C}$ u und $\frac{\partial u}{\partial x}$ gegeben sind, auch $\frac{\partial u}{\partial y}$. Da die Funktion v als bekannt gelten kann, so kann man die Werte von P und Q längs der Kurve $\mathfrak{C}$ berechnen, so daß das Integral auf der rechten Seite von (38) bekannt ist.

Sind die Werte von u, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ längs des Kurvenbogens $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2$ gegeben, so denken wir uns sowohl durch den Punkt $\mathfrak{A}_1$ als auch durch den Punkt $\mathfrak{A}_2$ die beiden Charakteristiken (die Parallelen zur y- und zur x-Achse) gelegt. Ist $A(\xi, \eta)$ ein beliebiger Punkt des von diesen Charakteristiken gebildeten Rechtecks, so ist $u(\xi, \eta)$ durch die Gleichung (38) bestimmt. Damit ist auch gezeigt, daß es nur eine der Differentialgleichung (B) genügende Funktion u gibt, wenn die Werte von u, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ längs der Kurve $\mathfrak{C}$ vorgeschrieben sind.

Setzt sich die Kurve $\mathfrak{C}$ aus der zur y-Achse parallelen Geraden $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_0$ und der zur x-Achse parallelen Geraden $\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_2$ zusammen, so liefert die Formel (38) den Wert von u in jedem Punkte des Rechtecks $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3$, wenn lediglich die Werte von u auf den Charakteristiken $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_0$ und $\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_2$ gegeben sind.

Es sei nämlich $A(\xi, \eta)$ ein beliebiger Punkt des Rechtecks $\mathfrak{R}(\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3)$; $A_1(x_0, \eta)$, $A_2(\xi, y_0)$ sind die Schnittpunkte der durch A gezogenen Charakteristiken mit den Rechteckseiten $\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_2$; $A_0(x_0, y_0)$ ist der bisher mit $\mathfrak{A}_0$ bezeichnete Punkt. Der in der Formel (38) enthaltene Ausdruck

$$\int_{A_1}^{A_2}(P\,dy - Q\,dx)$$

schreibt sich jetzt

$$\int_{A_1}^{A_0} P\,dy + \int_{A_2}^{A_0} Q\,dx\,.$$

Es ist

$$\int_{A_2}^{A_0} Q\,dx = \int_{A_2}^{A_0}\left[-\frac{1}{2}\,\frac{\partial(u\,v)}{\partial x} + v\left(\frac{\partial u}{\partial x} + b\,u\right)\right]dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[(u\,v)_{A_2} - (u\,v)_{A_0}\right] + \int_{A_2}^{A_0} v\left(\frac{\partial u}{\partial x} + b\,u\right)dx\,;$$

ähnlich findet man

$$\int_{A_1}^{A_0} P\,dy = \tfrac{1}{2}\left[(u\,v)_{A_1} - (u\,v)_{A_0}\right] + \int_{A_1}^{A_0} v\left(\frac{\partial u}{\partial y} + a\,u\right) dy\,.$$

Die Gleichung (38) schreibt sich jetzt

$$(40)\qquad \begin{cases} u(\xi,\eta) = (u\,v)_{A_0} - \displaystyle\int_{A_2}^{A_0} v\left(\frac{\partial u}{\partial x} + b\,u\right) dx \\ \qquad\qquad - \displaystyle\int_{A_1}^{A_0} v\left(\frac{\partial u}{\partial y} + a\,u\right) dy\,. \end{cases}$$

Aus den Werten von u längs $A_2 A_0$ folgen die Werte von $\frac{\partial u}{\partial x}$ längs dieser Geraden; aus den längs $A_1 A_0$ vorgeschriebenen Werten von u ergeben sich die Werte von $\frac{\partial u}{\partial y}$ längs $A_1 A_0$. Demnach kann $u(\xi,\eta)$ nach Formel (40) berechnet werden, wenn die Werte von u längs der beiden Charakteristiken $A_1 A_0$ und $A_0 A_2$ gegeben sind.

Es gibt also nur eine Funktion u, welche der Differentialgleichung (B) genügt und längs der Geraden $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_0$ und $\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_2$ vorgeschriebene Werte annimmt.

Demnach ist auch die Riemannsche Funktion $v(x, y; \xi, \eta)$ eindeutig bestimmt durch die Bedingung, daß sie der Differentialgleichung $M(v) = 0$ genügen und längs der Charakteristiken $x = \xi$ und $y = \eta$ vorgeschriebene Werte annehmen soll.

Der am Schlusse von § 30 ausgesprochene Satz läßt sich nun folgendermaßen ergänzen.

Die einzige nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung im Rechteck $\mathfrak{R}$ stetige Lösung der Differentialgleichung (B), welche längs der Charakteristiken $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_0$ und $\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_2$ vorgeschriebene Werte annimmt, läßt sich vermittels der Riemannschen Funktion $v(x, y; \xi, \eta)$ in einem beliebigen Punkt

$A(\xi, \eta)$ des Rechtecks $\mathfrak{R}$ in folgender Form darstellen:

$$u(\xi, \eta) = (uv)_{A_0} + \int_{A_0}^{A_2} v\left(\frac{\partial u}{\partial x} + bu\right) dx$$

$$+ \int_{A_0}^{A_1} v\left(\frac{\partial u}{\partial y} + au\right) dy \text{ *)}.$$

Die Ergänzung des Satzes in § 31 lautet:

Die einzige nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung im Rechteck $\mathfrak{R}$ stetige Lösung u der Differentialgleichung (B), welche nebst den Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{\partial u}{\partial y}$ längs der Kurve $\mathfrak{C}$ vorgeschriebene Werte annimmt, gestattet in einem beliebigen Punkt (ξ, η) des Rechtecks $\mathfrak{R}$ die Darstellung:

$$u(\xi, \eta) = \tfrac{1}{2}[(uv)_{A_1} + (uv)_{A_2}] - \int_{A_1}^{A_2} (P\,dy - Q\,dx),$$

wo P, Q die Werte (39) haben*).

Wir führen jetzt eine Funktion u zweier Variablenpaare x, y und ξ', η' ein, welche zur ursprünglichen Differentialgleichung $L(u) = 0$ in derselben Beziehung steht, wie die Riemannsche Funktion v zur adjungierten Differentialgleichung $M(v) = 0$. Die Funktion $u(x, y; \xi', \eta')$ genüge als Funktion von x, y der Differentialgleichung $L(u) = 0$ und nehme für $y = \eta'$ den Wert

$$e^{-\int_{\xi'}^{x} b\,dx}$$

und für $x = \xi'$ den Wert

$$e^{-\int_{\eta'}^{y} a\,dy}$$

an**).

*) Die in § 30 und § 31 benutzte Bezeichnung ist hier nur insofern geändert, als die Koordinaten eines beliebigen Punktes A des Rechtecks $\mathfrak{R}$ jetzt mit ξ, η statt mit x, y bezeichnet sind.

**) Beim Übergang von einer Differentialgleichung zur adjungierten gehen a, b in $-a$, $-b$ über.

Wir verstehen unter ξ', η' die Koordinaten des Punktes A_0 und setzen in der Formel (40) für u die soeben eingeführte Funktion $u(x, y; \xi', \eta')$; dann ist auf $A_0 A_2$ (für $y = \eta'$)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + b u = 0$$

und auf $A_0 A_1$ (für $x = \xi'$)

$$\frac{\partial u}{\partial y} + a u = 0,$$

so daß die beiden in der Formel (40) enthaltenen Integrale fortfallen; wegen $(u)_{A_0} = 1$ schreibt sich die Formel (40)

$$u(\xi, \eta) = v(\xi', \eta')$$

oder ausführlicher

$$u(\xi, \eta; \xi', \eta') = v(\xi', \eta'; \xi, \eta). \tag{41}$$

Die Riemannsche Funktion $v(x, y; \xi, \eta)$, welche als Funktion von x, y der adjungierten Gleichung genügt, stellt, wenn man ξ, η als Veränderliche und x, y als Parameter auffaßt, eine Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung dar (wenn man darin die unabhängigen Veränderlichen x, y durch ξ, η ersetzt); sie besitzt in bezug auf die Veränderlichen ξ, η und die ursprüngliche Differentialgleichung dieselben Eigenschaften wie in bezug auf die Veränderlichen x, y und die adjungierte Differentialgleichung. Durch die Bestimmung der Riemannschen Funktion $v(x, y; \xi, \eta)$ erledigt sich die Integration sowohl der ursprünglichen als auch der adjungierten Differentialgleichung*).

§ 33. Beispiele zur Riemannschen Integrationsmethode.

I. Wir betrachten als Beispiel die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0. \tag{42}$$

*) Bestimmung von Lösungen der hyperbolischen Differentialgleichung durch andere Bedingungen bei Hadamard (Bull. de la Soc. math. de France, 1903, 1904). Vgl. auch die Fußnote auf S. 118.

Die Riemannsche Funktion $v(x, y; \xi, \eta)$ genügt der adjungierten Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0$$

und nimmt, da a und b gleich Null sind, sowohl für $x = \xi$ als auch für $y = \eta$ den Wert 1 an; demnach ist

$$v = 1.$$

Wir bestimmen die Lösung u der Differentialgleichung (42), welche dadurch bestimmt ist, daß die Werte von u, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ längs der Geraden $y - x = 0$ vorgeschrieben sind; es sei

$$\text{(43)} \qquad u = f(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} = F(x)$$

für $y = x$, wo $f(x)$ und $F(x)$ gegebene Funktionen sind. Der Schnittpunkt A_1 der Geraden $x - y = 0$, $x = \xi$ hat die Koordinaten $x = \xi$, $y = \xi$ und der Schnittpunkt A_2 der Geraden $x - y = 0$, $y = \eta$ die Koordinaten $x = \eta$, $y = \eta$. Es ist jetzt nach (39)

$$P = \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y}, \qquad Q = \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Auf der Geraden $A_1 A_2$, über welche das Integral in (38) erstreckt wird, ist $y = x$, also $dy = dx$. Demnach geht die Formel (38) über in

$$\text{(44)} \qquad u(\xi, \eta) = \tfrac{1}{2}(f(\xi) + f(\eta)) - \tfrac{1}{2}\int_{\xi}^{\eta} F(x)\, dx.$$

II. Als weiteres Beispiel diene die Differentialgleichung

$$\text{(45)} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c u = 0,$$

wo c eine Konstante ist. Die Riemannsche Funktion $v(x, y; \xi, \eta)$ genügt der adjungierten Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + c v = 0$$

und nimmt sowohl für $x = \xi$ als auch für $y = \eta$ den Wert 1 an. Wir suchen v als Funktion des Ausdrucks

$$z = (x - \xi)(y - \eta)$$

darzustellen, welcher sowohl für $x = \xi$ als auch für $y = \eta$ verschwindet. Dann ist

$$\frac{\partial v}{\partial x} = (y - \eta)\frac{dv}{dz}, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = (x - \xi)\frac{dv}{dz},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial y} = z\frac{d^2 v}{dz^2} + \frac{dv}{dz},$$

so daß die Gleichung (45) in

$$z\frac{d^2 v}{dz^2} + \frac{dv}{dz} + cv = 0$$

übergeht. Wir führen die beständig konvergente Potenzreihe

(46) $$\Phi(z) = 1 - \frac{z}{1^2} + \frac{z^2}{1^2 \cdot 2^2} - \frac{z^3}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2} + \cdots$$

ein, so daß

$$\Phi(z) = J_0(2\sqrt{z})$$

ist, wo

$$J_0(z) = 1 - \frac{z^2}{2^2} + \frac{z^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{z^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \cdots$$

die Besselsche Funktion erster Art vom Index 0 darstellt*). Dann ist

$$v = \Phi(cz)$$

die einzige Lösung der Differentialgleichung (45), welche für $z = 0$ den Wert 1 annimmt. Wir haben demnach die Riemannsche Funktion

(47) $$v(x, y; \xi, \eta) = \Phi(c(x - \xi)(y - \eta)).$$

Wir bestimmen nun die Lösung u der Gleichung (45), welche wie vorhin dadurch bestimmt ist, daß

(48) $$u = f(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} = F(x)$$

---

*) Vgl. „Gewöhnl. Differentialgl.“, S. 179.

für $y = x$ sein soll. Die Punkte A_1 mit den Koordinaten $x = \xi$, $y = \xi$ und A_2 mit den Koordinaten $x = \eta$, $y = \eta$ sind dieselben wie vorhin. Das Integral in Formel (38) wird über die Gerade $A_1 A_2$ erstreckt, auf welcher $y = x$ ist. Auf dieser Geraden ist nach (39)

$$\begin{aligned} P - Q &= \frac{1}{2} v \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{1}{2} (\eta - \xi) u \frac{dv}{dz} \\ &= \frac{1}{2} \Phi(c(x - \xi)(x - \eta)) F(x) \\ &\quad - \frac{c}{2} (\eta - \xi) \Phi'(c(x - \xi)(x - \eta)) f(x) . \end{aligned}$$

Da in den Punkten A_1 und A_2 $v = 1$ ist, so ergibt die Formel (38):

$$(49) \quad \left\{ \begin{aligned} u(\xi, \eta) &= \tfrac{1}{2}(f(\xi) + f(\eta)) \\ &\quad - \tfrac{1}{2} \int_\xi^\eta \Phi(c(x - \xi)(x - \eta)) F(x)\, dx \\ &\quad + \tfrac{1}{2} c (\eta - \xi) \int_\xi^\eta \Phi'(c(x - \xi)(x - \eta)) f(x)\, dx . \end{aligned} \right.$$

III. Schließlich möge für die Differentialgleichung

$$(50) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\beta'}{x - y} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\beta}{x - y} \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

die Riemannsche Funktion bestimmt werden*). Die adjungierte Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\beta'}{x - y} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\beta}{x - y} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\beta + \beta'}{(x - y)^2} v = 0$$

geht durch die Substitution

$$v = (x - y)^{\beta + \beta'} w$$

in die Gleichung

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\beta}{x - y} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\beta'}{x - y} \frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

*) Vgl. die eingehendere Behandlung dieser Differentialgleichung bei Darboux, Théorie générale des surfaces, Bd. II, S. 54 ff. und S. 81 ff.

über, welche die Lösung

$$w = x^{\lambda} F\left(-\lambda, \beta, 1-\beta'-\lambda, \frac{y}{x}\right)$$

besitzt, wo λ eine willkürliche Konstante und $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ die Gaußsche hypergeometrische Reihe darstellt. Wenn die Differentialgleichung für w die Lösung $\varphi(x, y)$ hat, besitzt sie auch die Lösung

$$(x-\xi)^{-\beta'}(y-\xi)^{-\beta}\varphi\left(\frac{x-\eta}{x-\xi}, \frac{y-\eta}{y-\xi}\right)$$

mit den willkürlichen Konstanten ξ, η. Aus der oben angeschriebenen Lösung ergibt sich demnach die Lösung

$$w = (\eta - x)^{\lambda}(x-\xi)^{-\beta'-\lambda}(y-\xi)^{-\beta} F(-\lambda, \beta, 1-\beta'-\lambda, \sigma),$$

wobei gesetzt ist:

$$\sigma = \frac{(x-\xi)(y-\eta)}{(x-\eta)(y-\xi)}. \tag{51}$$

Hieraus erhält man durch Multiplikation mit $(x-y)^{\beta+\beta'}$ die folgende Lösung der adjungierten Differentialgleichung:

$$v = (\eta - x)^{\lambda}(\xi - x)^{-\beta'-\lambda}(y-\xi)^{-\beta}(y-x)^{\beta+\beta'} F(-\lambda, \beta, 1-\beta'-\lambda, \sigma).$$

Die Riemannsche Funktion ist die Lösung der adjungierten Differentialgleichung, welche sich für $x = \xi$ auf

$$e^{-\int\limits_{\eta}^{y} \frac{\beta'}{\xi - y} dy} = \left(\frac{y-\xi}{\eta-\xi}\right)^{\beta'}$$

und für $y = \eta$ auf

$$e^{\int\limits_{\xi}^{x} \frac{\beta}{x-\eta} dx} = \left(\frac{\eta - x}{\eta - \xi}\right)^{\beta}$$

reduziert. Für $x = \xi$ verschwindet σ und die Reihe F nimmt den Wert 1 an; der Faktor $(\xi - x)^{-\lambda-\beta'}$ wird aber gleich Null oder unendlich, wenn nicht $\lambda = -\beta'$ angenommen wird. Für $\lambda = -\beta'$ ist

$$v = (\eta - x)^{-\beta'}(y-\xi)^{-\beta}(y-x)^{\beta+\beta'} F(\beta', \beta, 1, \sigma); \tag{52}$$

man hat

$$v = \left(\frac{y-\xi}{\eta-\xi}\right)^{\beta'}$$

für $x = \xi$ und

$$v = \left(\frac{\eta-x}{\eta-\xi}\right)^{\beta}$$

für $y = \eta$; folglich stellt (52) die Riemannsche Funktion dar*).

*) Bei R. d'Adhémar, Les équations aux dérivées partielles à caractéristiques réelles (Coll. Scientia; Paris 1907) sind neuere Untersuchungen über hyperbolische Differentialgleichungen mit zwei und mehreren unabhängigen Veränderlichen kurz skizziert; ebenso im 5. Kapitel von R. d'Adhémar, Exercices et leçons d'Analyse (Paris 1908).

V. Abschnitt.

Die Fredholmsche Integralgleichung. Reihenentwicklungen nach den Eigenfunktionen eines symmetrischen Kerns.

§ 34. Lösung der Fredholmschen Integralgleichung im Falle $D(\lambda) \neq 0$.

Wir betrachten eine Integralgleichung (Funktionalgleichung) von der Form

$$\text{(A)} \qquad \varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s, t)\, \varphi(t)\, dt = f(s);$$

darin sind s und t reelle Veränderliche, welche sich in dem Intervall $a \ldots b$ bewegen; $K(s, t)$, der Kern*) der Integralgleichung, ist eine Funktion der Veränderlichen s, t und λ ein veränderlicher Parameter; $f(s)$ ist eine gegebene und $\varphi(s)$ eine zu bestimmende Funktion von s.

Nach Fredholm**) läßt sich die Integralgleichung (A) folgendermaßen nach der unbekannten Funktion $\varphi(s)$ auflösen.

Wir setzen sowohl $K(s, t)$ als auch $f(s)$ und $\varphi(s)$ als endliche und stetige Funktionen voraus***).

---

*) Nach Hilbert, dessen Bezeichnungen wir vielfach benutzen.

**) Stockholm Öfversigt 1900, S. 39; Acta mathematica, Bd. 27, S. 365. — Auf andere Weise hat Hilbert die Theorie der Integralgleichungen begründet (Göttinger Nachrichten 1904, S. 213 und 1906, S. 439); dabei wird die (in den Göttinger Nachrichten 1906, S. 157 entwickelte) Theorie der quadratischen Formen von unendlich vielen Veränderlichen benutzt.

***) Diese Voraussetzung, welche nicht notwendig ist, wird der Einfachheit halber gemacht.

Wir gehen aus von der Determinantenrelation*)

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\begin{vmatrix} K(s,t), & K(s,r_1), & \ldots, & K(s,r_n) \\ K(r_1,t), & K(r_1,r_1), & \ldots, & K(r_1,r_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ K(r_n,t), & K(r_n,r_1), & \ldots, & K(r_n,r_n) \end{vmatrix} \\ &\qquad = K(s,t) \begin{vmatrix} K(r_1,r_1), & \ldots, & K(r_1,r_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ K(r_n,r_1), & \ldots, & K(r_n,r_n) \end{vmatrix} \\ &+ \sum_{i=1}^{n} (-1)^i K(s,r_i) \begin{vmatrix} K(r_1,t), K(r_1,r_1), \ldots, K(r_1,r_{i-1}), K(r_1,r_{i+1}), \ldots, K(r_1,r_n) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ K(r_n,t), K(r_n,r_1), \ldots, K(r_n,r_{i-1}), K(r_n,r_{i+1}), \ldots, K(r_n,r_n) \end{vmatrix} \end{aligned}\right.$$

die man erhält, indem man die angeschriebene Determinante $(n+1)$ten Grades nach den Elementen der ersten Zeile entwickelt. Wenn man beide Seiten der Gleichung (1) in bezug auf jede der Veränderlichen $r_1, \ldots, r_n$ zwischen den Grenzen a und b integriert und durch $n!$ dividiert, erhält man unter Benutzung der Bezeichnung

$$(2)\quad A_n = \frac{1}{n!} \int_a^b \cdots \int_a^b \begin{vmatrix} K(r_1,r_1), & \ldots, & K(r_1,r_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ K(r_n,r_1), & \ldots, & K(r_n,r_n) \end{vmatrix} dr_1 \ldots dr_n,$$

$$(3)\quad A_n(s,t) = \frac{1}{n!} \int_a^b \cdots \int_a^b \begin{vmatrix} K(s,t), & K(s,r_1), & \ldots, & K(s,r_n) \\ K(r_1,t), & K(r_1,r_1), & \ldots, & K(r_1,r_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ K(r_n,t), & K(r_n,r_1), & \ldots, & K(r_n,r_n) \end{vmatrix} dr_1 \ldots dr_n \text{**)}$$

die Gleichung

$$(4)\quad A_n(s,t) = K(s,t) A_n - \int_a^b K(s,r) A_{n-1}(r,t)\, dr.$$

Das letzte Glied der Gleichung (4) ergibt sich folgendermaßen. Auf der rechten Seite der Gleichung (1) ist $(-1)^n K(s,r_n)$ mit der Determinante

*) Dabei ist n eine der Zahlen 1, 2, 3, ...

**) Es ist
$$A_0 = 1, \quad A_0(s,t) = K(s,t).$$

$$\begin{vmatrix} K(r, t), & K(r_1, r_1), & \ldots, & K(r_1, r_{n-1}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ K(r_n, t), & K(r_n, r_1), & \ldots, & K(r_n, r_{n-1}) \end{vmatrix}$$

multipliziert, welche wir dadurch umformen, daß wir die $n$te Zeile an den Anfang stellen und den Faktor $(-1)^{n-1}$ vorsetzen, welcher sich mit $(-1)^n$ zu -1 zusammensetzt; das letzte Glied der Gleichung (1) ist demnach

$$-K(s, r_n) \begin{vmatrix} K(r_n, t), & K(r_n, r_1), & \ldots, & K(r_n, r_{n-1}) \\ K(r_1, t), & K(r_1, r_1), & \ldots, & K(r_1, r_{n-1}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ K(r_{n-1}, t), & K(r_{n-1}, r_1), & \ldots, & K(r_{n-1}, r_{n-1}) \end{vmatrix}.$$

Wenn man dieses Glied nach $r_1, \ldots, r_n$ integriert, durch $n!$ dividiert und die Gleichung

$${}_{n-1}(r_n, t) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^b \cdots \int_a^b \begin{vmatrix} K(r_n, t), & K(r_n, r_1), & \ldots, & K(r_n, r_{n-1}) \\ K(r_1, t), & K(r_1, r_1), & \ldots, & K(r_1, r_{n-1}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ K(r_{n-1}, t), & K(r_{n-1}, r_1), & \ldots, & K(r_{n-1}, r_{n-1}) \end{vmatrix} dr_1 \ldots dr_{n-1}$$

berücksichtigt, erhält man

$$-\frac{1}{n}\int_a^b K(s, r_n)\, A_{n-1}(r_n, t)\, dr_n$$

$$= -\frac{1}{n}\int_a^b K(s, r)\, A_{n-1}(r, t)\, dr\,.$$

Beachtet man, daß sich das beschriebene Verfahren auf jedes der n letzten Glieder der Gleichung (1) anwenden läßt, so hat man das letzte Glied der Gleichung (4).

Wir führen die beiden folgenden Potenzreihen von λ ein:

(5) $$D(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A_n \lambda^n,$$

(6) $$D(\lambda; s, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A_n(s, t) \lambda^n;$$

in § 35 zeigen wir, daß diese beiden Reihen für alle Werte von λ konvergent sind. $D(\lambda)$ wird als **Determinante** des Kernes $K(s, t)$ bezeichnet, $D(\lambda; s, t)$ als Unterdeterminante erster Ordnung.

Wenn man die Gleichung (4) mit $(-1)^n \lambda^n$ multipliziert und über $n = 0, 1, 2, \ldots$ summiert*), erhält man die Gleichung

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n A_n(s, t)\lambda^n = K(s, t)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n A_n \lambda^n$$
$$+\int_a^b K(s, r)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} A_{n-1}(r, t)\lambda^n\, dr$$

oder

$$D(\lambda; s, t) = K(s, t)D(\lambda) + \lambda\int_a^b K(s, r)D(\lambda; r, t)\,dr \ldots \tag{7}$$

Wir machen zunächst die Voraussetzung, daß $D(\lambda)$ **von Null verschieden ist.**

Setzt man

$$\mathsf{K}(\lambda; s, t) = \frac{D(\lambda; s, t)}{D(\lambda)}, \tag{8}$$

so nimmt die Gleichung (7) die Form an:

$$\mathsf{K}(\lambda; s, t) = K(s, t) + \lambda\int_a^b K(s, r)\mathsf{K}(\lambda; r, t)\,dr$$

oder

$$K(s, t) = \mathsf{K}(\lambda; s, t) - \lambda\int_a^b K(s, r)\mathsf{K}(\lambda; r, t)\,dr. \tag{9}$$

Die Integralgleichung (A) wird also, wenn man $f(s) = K(s, t)$ setzt, durch $\varphi(s) = \mathsf{K}(\lambda; s, t)$ befriedigt.

Wenn man die Determinante $(n+1)$ten Grades auf der linken Seite der Gleichung (1) statt nach den Elementen der ersten Zeile nach denjenigen der ersten Kolonne ent-

---

*) Für $n = 0$ hat man an Stelle von (4) die Gleichung

$$A_0(s, t) = K(s, t),$$

da $A_{-1}(s, t)$ gleich Null zu setzen ist.

wickelt, im übrigen aber wie bisher verfährt, wird die Gleichung (7) durch

$$(7') \qquad D(\lambda;\, s,\, t) = K(s,\, t)\, D(\lambda) + \lambda \int_a^b D(\lambda;\, s,\, r)\, K(r,\, t)\, dr$$

und die Gleichung (9) durch

$$(9') \qquad K(s,\, t) = \mathsf{K}(\lambda;\, s,\, t) - \lambda \int_a^b \mathsf{K}(\lambda;\, s,\, r)\, K(r,\, t)\, dr$$

ersetzt.

Man bezeichnet die Funktion $\mathsf{K}(\lambda;\, s,\, t)$ als die lösende Funktion für den Kern $K(s, t)$; mit ihrer Hilfe läßt sich die Integralgleichung (A) folgendermaßen auflösen:

$$(10) \qquad \varphi(s) = f(s) + \lambda \int_a^b \mathsf{K}(\lambda;\, s,\, t)\, f(t)\, dt\,.$$

Zum Beweise fassen wir die linke Seite der Gleichung (A) als eine auf die Funktion $\varphi(s)$ ausgeübte Transformation auf und schreiben demgemäß

$$(11) \qquad S\,\varphi(s) = \varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s,\, t)\, \varphi(t)\, dt\,.$$

Mit Σ möge die Transformation bezeichnet werden, welche aus S dadurch hervorgeht, daß man $K(s, t)$ durch $-\mathsf{K}(\lambda; s, t)$ ersetzt; es ist also

$$(12) \qquad \Sigma f(s) = f(s) + \lambda \int_a^b \mathsf{K}(\lambda;\, s,\, t)\, f(t)\, dt\,.$$

Wendet man die Transformationen Σ und S nacheinander an, so erhält man

$$\begin{aligned} S\,\Sigma f(s) &= \Sigma f(s) - \lambda \int_a^b K(s,\, t) \cdot \Sigma f(t)\, dt \\ &= f(s) + \lambda \int_a^b (\mathsf{K}(\lambda;\, s,\, t) - K(s,\, t))\, f(t)\, dt \\ &\quad - \lambda^2 \int_a^b \int_a^b K(s,\, t)\, \mathsf{K}(\lambda;\, t,\, r)\, f(r)\, dr\, dt\,; \end{aligned}$$

die rechte Seite reduziert sich auf $f(s)$, wie man erkennt, indem man die Gleichung (9) mit $f(t)\,dt$ multipliziert und zwischen den Grenzen a und b integriert. Es ist also

$$S\Sigma f(s) = f(s)\,, \tag{13}$$

oder Σ ist die inverse Transformation von S. Ebenso ist unter Berücksichtigung von (9′)

$$\Sigma S \varphi(s) = \varphi(s)\,. \tag{14}$$

Wenn eine der Gleichung (A)

$$S\varphi(s) = f(s)$$

genügende Funktion $\varphi(s)$ existiert, so ist nach (14)

$$\varphi(s) = \Sigma f(s)\,,$$

wodurch die Funktion $\varphi(s)$ eindeutig bestimmt ist.

Umgekehrt genügt der Ausdruck (10) der Gleichung (A), denn es ist

$$S\varphi(s) = S\Sigma f(s) = f(s)$$

nach (13).

§ 35. Lösung der Fredholmschen Integralgleichung im Falle $D(\lambda) \neq 0$. Fortsetzung.

Um die Konvergenz der in § 34 aufgestellten Potenzreihen für $D(\lambda)$ und $D(\lambda; s, t)$ zu beweisen, benutzen wir einen von Hadamard*) herrührenden Determinantensatz. Die Determinante

$$D = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots, & a_{nn} \end{vmatrix}$$

oder

$$D = [a_{ik}] \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

gehe, wenn man jedes Element a_{ik} durch die konjugiert komplexe Größe $\bar{a}_{ik}$ ersetzt, in

$$\bar{D} = [\bar{a}_{ik}] \qquad (i, k = 1, \ldots, n)$$

*) Bulletin des sciences mathématiques, 2. Serie, Bd. 17 (1893). — Der im Text enthaltene Beweis wurde von Wirtinger (Monatshefte für Math. u. Phys. 1907) gegeben.

über. Dann ist, wie wir zeigen werden,

$$(15) \qquad D\bar{D} \leqq \prod_{i=1}^{n} (a_{i1}\bar{a}_{i1} + \cdots + a_{in}\bar{a}_{in}) .$$

Beachtet man, daß

$$D\bar{D} = |D|^2, \qquad a_{ik}\bar{a}_{ik} = |a_{ik}|^2$$

ist, so kann man schreiben:

$$|D|^2 \leqq \prod_{i=1}^{n} (|a_{i1}|^2 + \cdots + |a_{in}|^2) .$$

Ist kein Element a_{ik} der Determinante D dem absoluten Betrage nach größer als die positive Größe $\mathfrak{A}$, so ist

$$|a_{i1}|^2 + \cdots + |a_{in}^2| \leqq n\mathfrak{A}^2 ,$$

also

$$|D|^2 \leqq n^n \mathfrak{A}^{2n}$$

oder

$$|D| \leqq \mathfrak{A}^n \sqrt{n^n} .$$

Um die Ungleichung (15) zu beweisen, setzen wir

$$s_i = a_{i1}\bar{a}_{i1} + \cdots + a_{in}\bar{a}_{in} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

und dividieren die Elemente der $i$ten Zeile der Determinante D sowohl wie der konjugiert komplexen Determinante $\bar{D}$ durch $\sqrt{s_i}$. Wir setzen

$$\frac{a_{ik}}{\sqrt{s_i}} = \alpha_{ik} , \qquad \frac{\bar{a}_{ik}}{\sqrt{s_i}} = \bar{\alpha}_{ik} ,$$

so daß

$$(\alpha) \qquad \alpha_{i1}\bar{\alpha}_{i1} + \cdots + \alpha_{in}\bar{\alpha}_{in} = 1 \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

ist, und

$$\Delta = [\alpha_{ik}] , \qquad \bar{\Delta} = [\bar{\alpha}_{ik}] .$$

Wir suchen das Maximum von $\Delta\bar{\Delta}$ unter der Voraussetzung, daß die Größen α_{ik} und $\bar{\alpha}_{ik}$ die n Bedingungen (α) erfüllen. Wir wenden die aus der Differentialrechnung bekannte Lagrangesche Regel an, indem wir unter Einführung

der n Koeffizienten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die partiellen Ableitungen des Ausdrucks

$$\varDelta \overline{\varDelta} - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} \overline{\alpha}_{ik}$$

nach den $2n^2$ Größen α_{ik}, $\overline{\alpha}_{ik}$ gleich Null setzen. Wir erhalten so die $2n^2$ Gleichungen

$$\overline{\varDelta} \mathsf{A}_{ik} = \lambda_i \overline{\alpha}_{ik}, \qquad \varDelta \overline{\mathsf{A}}_{ik} = \lambda_i \alpha_{ik},$$

wo

$$\mathsf{A}_{ik} = \frac{\partial \varDelta}{\partial \alpha_{ik}}, \qquad \overline{\mathsf{A}}_{ik} = \frac{\partial \overline{\varDelta}}{\partial \overline{\alpha}_{ik}}$$

Unterdeterminanten sind. Daraus folgt

$$\overline{\varDelta} \sum_k \mathsf{A}_{ik} \alpha_{ik} = \lambda_i \sum_k \alpha_{ik} \overline{\alpha}_{ik}$$

oder, da

$$\varDelta = \sum_k \mathsf{A}_{ik} \alpha_{ik}$$

ist, mit Rücksicht auf (α)

$$\varDelta \overline{\varDelta} = \lambda_i = \lambda .$$

Weiter ist

$$\overline{\varDelta}^n [\mathsf{A}_{ik}] = \lambda^n [\overline{\alpha}_{ik}]$$

oder, da

$$[\mathsf{A}_{ik}] = \varDelta^{n-1}$$

ist,

$$\overline{\varDelta}^n \varDelta^{n-1} = \lambda^n \overline{\varDelta},$$

d. h.

$$(\varDelta \overline{\varDelta})^{n-1} = \lambda^n$$

oder $\lambda^{n-1} = \lambda^n$, woraus sich ergibt, daß $\lambda = 1$ oder das Maximum von $\varDelta \overline{\varDelta}$ gleich 1 ist.

Aus der Ungleichung

$$\varDelta \overline{\varDelta} \leqq 1$$

folgt, da

$$\varDelta = \frac{D}{\sqrt{s_1 \ldots s_n}}, \qquad \overline{\varDelta} = \frac{\overline{D}}{\sqrt{s_1 \ldots s_n}}$$

ist,

$$D \overline{D} \leqq s_1 \ldots s_n,$$

w. z. b. w.

Damit ist der Satz bewiesen:
Erfüllen die Elemente der Determinante

$$D = \begin{vmatrix} a_{11}, & \ldots, & a_{1n} \\ \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot & \cdot \\ a_{n1}, & \ldots, & a_{nn} \end{vmatrix}$$

die Bedingung

$$|a_{ik}| \leqq \mathfrak{A}, \qquad (i, k = 1, \ldots, n)$$

so ist

$$|D| \leqq \mathfrak{A}^n \sqrt{n^n}.$$

Es sei nun K eine positive Größe, welche von der Funktion $K(s, t)$ nicht überschritten wird, wenn man s und t auf das Intervall $a \ldots b$ beschränkt. Dann ist nach dem soeben ausgesprochenen Determinantensatz der absolute Betrag der Determinante

$$\begin{vmatrix} K(s_1, s_1), & \ldots, & K(s_1, s_n) \\ \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot & \cdot \\ K(s_n, s_1), & \ldots, & K(s_n, s_n) \end{vmatrix}$$

höchstens gleich

$$K^n \sqrt{n^n};$$

nach (2) ist also

$$|A_n| \leqq \frac{K^n \sqrt{n^n} (b-a)^n}{n!}$$

und

$$\sqrt[n]{|A_n|} \leqq \frac{K(b-a)\sqrt{n}}{\sqrt[n]{n!}}.$$

Aus der asymptotischen Darstellung der Gammafunktion durch die Stirlingsche Reihe folgt

$$\log n! = \tfrac{1}{2} \log 2\pi n + n \log n - n + \varepsilon_n, \quad \lim_{n=+\infty} \varepsilon_n = 0,$$

$$\log \sqrt[n]{n!} = \log n - 1 + \frac{\log 2\pi n}{2n} + \frac{\varepsilon_n}{n},$$

$$\sqrt[n]{n!} = \frac{n}{e}(1 + \delta_n), \quad \lim_{n=+\infty} \delta_n = 0.$$

Also ist

$$\sqrt[n]{|A_n|} \leqq \frac{e K (b-a)}{\sqrt{n}(1+\delta_n)}$$

und folglich

(16) $$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{|A_n|} = 0 .$$

Daraus geht hervor, daß die Reihe (5)

$$D(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A_n \lambda^n$$

für alle Werte von λ konvergent ist.

Das gleiche beweist man auf demselben Wege für die oben mit $D(\lambda; s, t)$ bezeichnete Reihe (5), und zwar konvergiert diese Reihe gleichmäßig nicht nur für alle einem endlichen Gebiet der λ-Ebene angehörenden Werte von λ, sondern auch für alle Werte von s und t, welche dem Gebiet $a \leqq s \leqq b$, $a \leqq t \leqq b$ angehören.

Damit ist der Satz bewiesen:

Der Kern $K(s, t)$ der Integralgleichung

(A) $$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s, t)\, \varphi(t)\, dt$$

sei eine für $a \leqq s \leqq b$, $a \leqq t \leqq b$ endliche und stetige Funktion. Die Reihen

$$D(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A_n \lambda^n,$$

$$D(\lambda; s, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A_n(s, t)\, \lambda^n,$$

deren Koeffizienten A_n und $A_n(s, t)$ durch die Gleichungen (2) und (3) definiert sind, stellen ganze transzendente Funktionen von λ dar. Die lösende Funktion

$$\mathsf{K}(\lambda; s, t) = \frac{D(\lambda; s, t)}{D(\lambda)}$$

des Kernes $K(s, t)$ genügt der Gleichung

$$K(s, t) = \mathsf{K}(\lambda; s, t) - \lambda \int_a^b K(s, r)\, \mathsf{K}(\lambda; r, t)\, dr .$$

Ist $D(\lambda)$ von Null verschieden, so hat die Integralgleichung (A) eine und nur eine Lösung

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda\int_a^b \mathsf{K}(\lambda\,;\, s\,,\, t)\, f(t)\, dt\,.$$

Setzt man hierin $f(s) = 0$, so sieht man, daß die homogene Integralgleichung

$$\varphi(s) - \lambda\int_a^b K(s\,,\, t)\,\varphi(t)\, dt = 0$$

nur die Lösung $\varphi(s) = 0$ besitzt.

Wir schließen einige Bemerkungen an, von denen im folgenden Gebrauch gemacht wird.

Mit Rücksicht auf die Ausdrücke (2) und (3) für A_n und $A_n(s\,,\, t)$ hat man

$$(n+1)\, A_{n+1} = \int_a^b A_n(s\,,\, s)\, ds\,;$$

wenn man diese Gleichung mit $(-1)^{n+1}\lambda^n$ multipliziert und über $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ summiert, erhält man

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(n+1)\, A_{n+1}\,\lambda^n = -\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\lambda^n\int_a^b A_n(s\,,\, s)\, ds$$

oder

$$\frac{dD(\lambda)}{d\lambda} = -\int_a^b D(\lambda\,;\, s\,,\, s)\, ds\,. \tag{17}$$

Die lösende Funktion $\mathsf{K}(\lambda;\, s\,,\, t)$ des Kernes $K(s\,,\, t)$ läßt sich in eine Potenzreihe von λ entwickeln, welche, da $D(0) = A_0 = 1$ ist, in einer gewissen Umgebung von $\lambda = 0$ konvergiert:

$$\mathsf{K}(\lambda\,;\, s\,,\, t) = \sum_{n=0}^{\infty} K^{n+1}(s\,,\, t)\,\lambda^n\,. \tag{18}$$

Setzt man diese Reihe in die Gleichung (9) ein, so erhält man durch Vergleichung der von λ freien Glieder

$$K^1(s\,,\, t) = K(s\,,\, t)$$

und durch Vergleichung der Koeffizienten von λ^n

$$K^{n+1}(s, t) = \int_a^b K(s, r) K^n(r, t)\, dr .$$

Demnach ist

$$K^2(s, t) = \int_a^b K(s, r) K(r, t)\, dr ,$$

$$K^3(s, t) = \int_a^b K(s, r) K^2(r, t)\, dr$$

$$= \int_a^b\int_a^b K(s, r) K(r, r_1) K(r_1, t)\, dr\, dr_1$$

usw. und allgemein

$$K^{n+1}(s, t) = \int_a^b\int_a^b \ldots \int_a^b K(s, r) K(r, r_1) \ldots K(r_{n-1}, t)\, dr\, dr_1 \ldots dr_{n-1} ; \tag{19}$$

daraus folgt

$$K^{m+n}(s, t) = \int_a^b K^m(s, r) K^n(r, t)\, dr .$$

Die Größen $K^n(s, t)$ werden als **iterierte Kerne** bezeichnet.

Für $\lambda = 0$ ergibt sich aus (18)

$$\mathsf{K}(0; s, t) = K(s, t) .$$

§ 36. Lösung der Integralgleichung im Falle $D(\lambda) = 0$.

Nachdem die Integralgleichung (A) unter der Voraussetzung gelöst ist, daß die Determinante $D(\lambda)$ nicht verschwindet, verstehen wir unter $\lambda = \lambda_0$ eine Wurzel der Gleichung $D(\lambda) = 0$ und betrachten zunächst die **homogene Integralgleichung**

$$\varphi(s) - \lambda_0 \int_a^b K(s, t)\, \varphi(t)\, dt = 0 . \tag{B_0}$$

Ist λ_0 eine einfache Nullstelle von $D(\lambda)$, ist also $D(\lambda_0) = 0$, $D'(\lambda_0) \neq 0$, so kann, weil die Gleichung (17)

$$D'(\lambda_0) = -\int_a^b D(\lambda_0\,;\, s\,,\, s)\, ds$$

besteht, $D(\lambda_0;\, s,\, s)$ nicht für alle Werte von s verschwinden. Die Funktion

$$\mathsf{K}(\lambda;\, s\,,\, t) = \frac{D(\lambda;\, s\,,\, t)}{D(\lambda)}$$

besitzt den einfachen Pol $\lambda = \lambda_0$, in dessen Umgebung die Entwicklung

$$\mathsf{K}(\lambda;\, s\,,\, t) = \frac{D(\lambda_0\,;\, s\,,\, t)}{D'(\lambda_0)}\,\frac{1}{\lambda - \lambda_0} + \mathfrak{P}(\lambda - \lambda_0)$$

besteht, wo $\mathfrak{P}(\lambda - \lambda_0)$ eine von s und t abhängige Potenzreihe von $\lambda - \lambda_0$ darstellt. Wenn man diesen Ausdruck für $\mathsf{K}(\lambda;\, s\,,\, t)$ in die Gleichung (9) einsetzt, mit $\lambda - \lambda_0$ multipliziert und hierauf $\lambda = \lambda_0$ setzt, erhält man die Gleichung

$$D(\lambda_0\,;\, s\,,\, t) = \lambda_0 \int_a^b K(s\,,\, r)\, D(\lambda_0\,;\, r,\, t)\, dr\,.$$

Werden die Zahlenwerte s_1, t_1 so gewählt, daß $D(\lambda_0;\, s_1,\, t_1)$ von Null verschieden ist, so kann die Funktion

$$\varphi(s) = D(\lambda_0\,;\, s\,,\, t_1)\,,$$

welche der Gleichung

$$\varphi(s) = \lambda_0 \int_a^b K(s\,,\, r)\, \varphi(r)\, dr$$

genügt, nicht identisch in s verschwinden.

Um auch den Fall einer mehrfachen Wurzel der Gleichung $D(\lambda) = 0$ behandeln zu können, verallgemeinern wir die in § 34 benutzten Determinantenrelationen.

Indem wir die Bezeichnung

$$(20)\qquad K\begin{pmatrix} s_1, & \ldots, & s_m \\ t_1, & \ldots, & t_m \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} K(s_1,\, t_1), & \ldots, & K(s_1,\, t_m) \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ K(s_m,\, t_1), & \ldots, & K(s_m,\, t_m) \end{vmatrix}$$

benutzen, setzen wir

$$(21)\quad \begin{cases} A_n(s_1, \dots, s_m; t_1, \dots, t_m) \\ = \dfrac{1}{n!} \displaystyle\int_a^b \dots \int_a^b K\begin{pmatrix} s_1, & \dots, & s_m, & r_1, & \dots, & r_n \\ t_1, & \dots, & t_m, & r_1, & \dots, & r_n \end{pmatrix} dr_1 \dots dr_n . \end{cases}$$

Dann stellt die Reihe

$$(22)\quad \begin{cases} D(\lambda; s_1, \dots, s_m; t_1, \dots, t_m) \\ = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A_n(s_1, \dots, s_m; t_1, \dots, t_m) \lambda^n \end{cases}$$

eine ganze transzendente Funktion von λ dar, welche man als Unterdeterminante m ter Ordnung von $D(\lambda)$ bezeichnet.

Ähnlich wie die Gleichung (17) in § 35 beweist man die folgende allgemeinere Gleichung:

$$(23)\quad \frac{d^m D(\lambda)}{d\lambda^m} = (-1)^m \int_a^b \dots \int_a^b D(\lambda; s_1, \dots, s_m; s_1, \dots, s_m)\, ds_1 \dots d$$

Wären für einen gewissen Wert $\lambda = \lambda_0$ sämtliche Unterdeterminanten

$$D(\lambda; s_1, \dots, s_m; t_1, \dots, t_m) \qquad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

identisch in $s_1, \dots; t_1, \dots$ gleich Null, so würden alle Ableitungen von $D(\lambda)$ für $\lambda = \lambda_0$ verschwinden, was nicht möglich ist, da $\lambda = \lambda_0$ für die ganze transzendente Funktion $D(\lambda)$ nur eine Nullstelle von endlicher Ordnung sein kann.

Die Determinantenrelation (1) läßt sich folgendermaßen verallgemeinern:

$$(24)\quad \begin{cases} K\begin{pmatrix} s_1, & \dots, & s_m, & r_1, & \dots, & r_n \\ t_1, & \dots, & t_m, & r_1, & \dots, & r_n \end{pmatrix} \\ - K(s_1, t_1)\, K\begin{pmatrix} s_2, & \dots, & s_m, & r_1, & \dots, & r_n \\ t_2, & \dots, & t_m, & r_1, & \dots, & r_n \end{pmatrix} \\ \quad K(s_1, t_2)\, K\begin{pmatrix} s_2, & s_3, & \dots, & s_m, & r_1, & \dots, & r_n \\ t_1, & t_3, & \dots, & t_m, & r_1, & \dots, & r_n \end{pmatrix} \\ + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ + (-1)^m K(s_1, r_1)\, K\begin{pmatrix} s_2, & \dots, & s_m, & r_1, & r_2, & \dots, & r_n \\ t_1, & \dots, & t_{m-1}, & t_m, & r_2, & \dots, & r_n \end{pmatrix} \\ + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Wenn man beide Seiten der Gleichung (24) in bezug auf jede der Veränderlichen $r_1, \ldots, r_n$ zwischen a und b integriert und durch $n!$ dividiert, erhält man die der Gleichung (4) entsprechende Gleichung

$$(25)\quad \begin{cases} A_n(s_1, \ldots, s_m; t_1, \ldots, t_m) \\ = K(s_1, t_1) A_n(s_2, \ldots, s_m; t_2, \ldots, t_m) \\ - K(s_1, t_2) A_n(s_2, s_3, \ldots, s_m; t_1, t_3, \ldots, t_m) \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ - \int\limits_a^b K(s_1, r) A_{n-1}(r, s_2, \ldots, s_m; t_1, t_2, \ldots, t_m)\, dr\,. \end{cases}$$

Durch Multiplikation dieser Gleichung mit $(-1)^n \lambda^n$ und Summation über $n = 0, 1, 2, \ldots$ erhält man

$$(26)\quad \begin{cases} D(\lambda; s_1, \ldots, s_m; t_1, \ldots, t_m) \\ = K(s_1, t_1) D(\lambda; s_2, \ldots, s_m; t_2, \ldots, t_m) \\ - K(s_1, t_2) D(\lambda; s_2, \ldots, s_m; t_1, t_3, \ldots, t_m) \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \lambda \int\limits_a^b K(s_1, r) D(\lambda; r, s_2, \ldots, s_m; t_1, t_2, \ldots, t_m)\, dr\,. \end{cases}$$

Verschwindet für $\lambda = \lambda_0$ nicht nur die Determinante $D(\lambda)$, sondern auch die Unterdeterminanten von geringerer als der $m$ten Ordnung, ist aber $D(\lambda_0; s_1, \ldots, s_m; t_1, \ldots, t_m)$ nicht Null*), so schreibt sich die Gleichung (26)

$$(27)\quad \begin{cases} D(\lambda_0; s_1, \ldots, s_m; t_1, \ldots, t_m) \\ = \lambda_0 \int\limits_a^b K(s_1, r) D(\lambda_0; r, s_2, \ldots, s_m; t_1, \ldots, t_m)\, dr \end{cases}$$

oder wenn man s_1 durch s ersetzt:

$$(27')\quad \begin{cases} D(\lambda_0; s, s_2, \ldots, s_m; t_1, \ldots, t_m) \\ = \lambda_0 \int\limits_a^b K(s, r) D(\lambda_0; r, s_2, \ldots, s_m; t_1, \ldots, t_m)\, dr\,. \end{cases}$$

---

*) Dann ist, wie aus der Gleichung (23) folgt, $\lambda = \lambda_0$ eine mindestens $m$fache Wurzel der Gleichung $D(\lambda) = 0$.

Setzt man für $s_1, \ldots, s_m$ und $t_1, \ldots, t_m$ solche Zahlenwerte, daß $D(\lambda_0; s_1, \ldots, s_m; t_1, \ldots, t_m)$ nicht verschwindet, so stellt der Ausdruck

$$\varphi(s) = D(\lambda_0; s, s_2, \ldots, s_m; t_1, \ldots, t_m)$$

sowohl wie der Ausdruck

$$\varphi(s) = \frac{D(\lambda_0; s, s_2, \ldots, s_m; t_1, \ldots, t_m)}{D(\lambda_0; s_1, \ldots, s_m; t_1, \ldots, t_m)}$$

eine Lösung der homogenen Integralgleichung (B_0)

$$\varphi(s) - \lambda_0 \int_a^b K(s, r)\, \varphi(r)\, dr = 0$$

dar. Ebenso ergibt sich

$$(28) \quad \varphi_i(s) = \frac{D(\lambda_0; s_1, \ldots, s_{i-1}, s, s_{i+1}, \ldots, s_m; t_1, \ldots, t_m)}{D(\lambda_0; s_1, \ldots, s_m; t_1, \ldots, t_m)} \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

als Lösung der Gleichung (B_0).

Setzt man an Stelle der Formel (24) diejenige, welche man erhält, indem man bei der Entwicklung der Determinante (24) die Zeilen und Kolonnen vertauscht, so wird die Formel (26) durch die folgende ersetzt:

$$(29) \quad \left\{ \begin{aligned} & D(\lambda; s_1, \ldots, s_m; t_1, \ldots, t_m) \\ & = K(s_1, t_1)\, D(\lambda; s_2, \ldots, s_m; t_2, \ldots, t_m) \\ & - K(s_2, t_1)\, D(\lambda; s_1, s_3, \ldots, s_m; t_2, \ldots, t_m) \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + \lambda \int_a^b K(r, t_1)\, D(\lambda; s_1, s_2, \ldots, s_m; r, t_2, \ldots, t_m)\, dr\,. \end{aligned} \right.$$

Für $\lambda = \lambda_0$, wo λ_0 dieselbe Bedeutung hat wie vorhin, geht diese Gleichung, wenn man noch t_1 durch t ersetzt, über in

$$(30) \quad \left\{ \begin{aligned} & D(\lambda_0; s_1, \ldots, s_m; t, t_2, \ldots, t_m) \\ & = \lambda_0 \int_a^b K(r, t)\, D(\lambda_0; s_1, \ldots, s_m; r, t_2, \ldots, t_m)\, dr\,. \end{aligned} \right.$$

Demnach genügt die Funktion

$$\psi(t) = D(\lambda_0\,;\, s_1\,,\,\ldots,\, s_m\,;\, t,\, t_2\,,\,\ldots,\, t_m)$$

oder

$$\psi(t) = \frac{D(\lambda_0\,;\, s_1\,,\,\ldots,\, s_m\,;\, t,\, t_2\,,\,\ldots,\, t_m)}{D(\lambda_0\,;\, s_1\,,\,\ldots,\, s_m\,;\, t_1\,,\,\ldots,\, t_m)}$$

der Gleichung

$$(\mathrm{B}_0') \qquad \psi(t) - \lambda_0 \int_a^b \psi(r)\, K(r\,,\, t)\, dr = 0\,.$$

Auf diesem Wege ergeben sich die m Lösungen

$$(31) \qquad \psi_i(t) = \frac{D(\lambda_0\,;\, s_1\,,\,\ldots,\, s_m\,;\, t_1\,,\,\ldots,\, t_{i-1}\,,\, t\,,\, t_{i+1}\,,\,\ldots,\, t_m)}{D(\lambda_0\,;\, s_1\,,\,\ldots,\, s_m\,;\, t_1\,,\,\ldots,\, t_m)}$$
$$(i = 1,\,\ldots,\, m)$$

der homogenen Integralgleichung (B_0').

Wir weisen nach, daß die m Funktionen

$$\varphi_1(s)\,, \quad \ldots, \quad \varphi_m(s)$$

linear unabhängig sind.

Die Gleichung (27) kann in der Form geschrieben werden:

$$(32) \qquad \lambda_0 \int_a^b K(s_1\,,\, r)\, \varphi_1(r)\, dr = 1\,.$$

Aus der Formel (24) geht eine andere hervor, indem man die Determinante auf der linken Seite durch 0 und die Größen

$$K(s_1\,,\, t_1)\,, \quad K(s_1\,,\, t_2)\,, \quad \ldots, \quad K(s_1\,,\, r_1)\,, \quad \ldots$$

auf der rechten Seite durch

$$K(s_2\,,\, t_1)\,, \quad K(s_2\,,\, t_2)\,, \quad \ldots, \quad K(s_2\,,\, r_1)\,, \quad \ldots$$

ersetzt. Wenn man die abgeänderte Relation ebenso behandelt wie oben die Relation (24), erhält man an Stelle der Gleichung (32) die Gleichung

$$(33) \qquad \int_a^b K(s_2\,,\, r)\, \varphi_1(r)\, dr = 0\,.$$

Es ist demnach

$$(34) \qquad \int_a^b K(s_i, r)\, \varphi_{i'}(r)\, dr = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda_0} & \text{für } i = i', \\ 0 & \text{,, } i \gtrless i'. \end{cases}$$

Besteht eine Relation

$$c_1 \varphi_1(s) + \ldots + c_m \varphi_m(s) = 0$$

mit konstanten Koeffizienten $c_1, \ldots, c_m$, so ist für $i = 1, \ldots, m$

$$c_1 \int_a^b K(s_i, r)\, \varphi_1(r)\, dr + \ldots + c_m \int_a^b K(s_i, r)\, \varphi_m(r)\, dr = 0,$$

also mit Rücksicht auf (34) $c_i = 0$.

Ebenso ergibt sich, daß

$$\psi_1(t), \quad \ldots, \quad \psi_m(t)$$

linear unabhängig sind.

§ 37. Lösung der Integralgleichung im Falle $D(\lambda) = 0$. Fortsetzung.

Wir zeigen, daß die allgemeinste Lösung $\varphi(s)$ der Integralgleichung (B_0) eine lineare homogene Funktion von $\varphi_1(s), \ldots, \varphi_m(s)$ mit konstanten Koeffizienten ist.

Wir setzen

$$(35) \qquad \Gamma(s, t) = \frac{D(\lambda_0; s, s_1, \ldots, s_m; t, t_1, \ldots, t_m)}{D(\lambda_0; s_1, \ldots, s_m; t_1, \ldots, t_m)}$$

und

$$(36) \qquad \Sigma f(s) = f(s) + \lambda_0 \int_a^b \Gamma(s, t)\, f(t)\, dt.$$

Dann ist, wenn unter S die Substitution (11) für $\lambda = \lambda_0$

$$S\varphi(s) = \varphi(s) - \lambda_0 \int_a^b K(s, t)\, \varphi(t)\, dt$$

verstanden wird,

$$(37) \qquad \Sigma S \varphi(s) = T \varphi(s),$$

wo

$$T\varphi(s) = \varphi(s) + \lambda_0 \int_a^b Q(s, t)\,\varphi(t)\,dt \tag{38}$$

und

$$Q(s, t) = \Gamma(s, t) - K(s, t) - \lambda_0 \int_a^b \Gamma(s, r)\,K(r, t)\,dr \tag{39}$$

ist. Der Formel (29) entsprechend ist

$$\begin{aligned} & D(\lambda; s, s_1, \ldots, s_m; t, t_1, \ldots, t_m) \\ & - K(s, t)\,D(\lambda; s_1, \ldots, s_m; t_1, \ldots, t_m) \\ & - \lambda \int_a^b K(r, t)\,D(\lambda; s, s_1, \ldots, s_m; r, t_1, \ldots, t_m)\,dr \\ & = -K(s_1, t)\,D(\lambda; s, s_2, \ldots, s_m; t_1, \ldots, t_m) \\ & \quad + K(s_2, t)\,D(\lambda; s, s_1, s_3, \ldots, s_m; t_1, \ldots, t_m) - \ldots; \end{aligned}$$

setzt man hierin $\lambda = \lambda_0$ und dividiert man durch

$$D(\lambda_0; s_1, \ldots, s_m; t_1, \ldots, t_m),$$

so hat man

$$Q(s, t) = -K(s_1, t)\,\varphi_1(s) - \ldots - K(s_m, t)\,\varphi_m(s), \tag{40}$$

also

$$T\varphi(s) = \varphi(s) - \sum_{i=1}^{m} c_i\,\varphi_i(s) \tag{41}$$

unter Benutzung der Bezeichnung

$$c_i = \lambda_0 \int_a^b K(s_i, t)\,\varphi(t)\,dt. \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

Wenn eine der Gleichung $S\varphi(s) = 0$ genügende Funktion $\varphi(s)$ vorhanden ist, so ist nach (37)

$$T\varphi(s) = 0$$

oder wegen (41)

$$\varphi(s) = \sum_{i=1}^{m} c_i\,\varphi_i(s), \tag{42}$$

w. z. b w.

Ebenso erkennt man, daß die allgemeinste Lösung $\psi(t)$ von (B_0') eine lineare homogene Verbindung von $\psi_1(t), \ldots, \psi_m(t)$ mit konstanten Koeffizienten ist.

Wir werfen noch die Frage auf, unter welchen Bedingungen die Integralgleichung (A) lösbar ist, wenn für λ eine Wurzel λ_0 der Gleichung $D(\lambda) = 0$ gesetzt wird.

Wenn man die Gleichung

$$(\mathrm{A}_0) \qquad \varphi(s) - \lambda_0 \int_a^b K(s, t)\, \varphi(t)\, dt = f(s)$$

nach Multiplikation mit $\psi_i(s)\, ds$ $(i = 1, \ldots, m)$ zwischen den Grenzen a und b integriert, erhält man

$$\int_a^b \varphi(s)\, \psi_i(s)\, ds - \lambda_0 \int_a^b\!\!\int_a^b K(s, t)\, \psi_i(s)\, \varphi(t)\, ds\, dt = \int_a^b f(s)\, \psi_i(s)\, ds\,.$$

Die linke Seite dieser Gleichung verschwindet, denn sie wird erhalten, indem man die Gleichung

$$\psi_i(s) - \lambda_0 \int_a^b \psi_i(r)\, K(r, s)\, dr = 0 \text{ *)}$$

nach Multiplikation mit $\varphi(s)\, ds$ zwischen a und b integriert. Also muß

$$(43) \qquad \int_a^b f(s)\, \psi_i(s)\, ds = 0 \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

sein.

Wir setzen die Bedingungen (43) als erfüllt voraus und fragen, ob die Gleichung (A_0) Lösungen besitzt.

Ist eine der Gleichung (A_0) oder

$$(44) \qquad S\varphi(s) = f(s)$$

genügende Funktion $\varphi(s)$ vorhanden, so erhält man, wenn man auf beide Seiten der Gleichung (44) die Transformation Σ anwendet,

$$(45) \qquad \Sigma S \varphi(s) = T\varphi(s) = \Sigma f(s)\,,$$

*) Diese Gleichung besteht, weil $\psi_i(t)$ eine Lösung der homogenen Integralgleichung (B_0') ist.

oder wegen (41)

$$\varphi(s) - \sum_{i=1}^{m} c_i \varphi_i(s) = \Sigma f(s) .$$

Eine etwa vorhandene Lösung der Gleichung (A_0) ist also von der Form

$$\varphi(s) = \Sigma f(s) + \sum_{i=1}^{m} c_i \varphi_i(s) . \tag{46}$$

Aus einer Lösung der Gleichung (A_0) geht durch Addition der Lösung

$$\sum_{i=1}^{m} c_i \varphi_i(s)$$

der homogenen Gleichung (B_0) wieder eine Lösung der Gleichung (A_0) hervor; wir brauchen also nur zu zeigen, daß

$$\varphi(s) = \Sigma f(s) \tag{47}$$

der Gleichung (A_0) genügt.

Es ist

$$S\varphi(s) = S\Sigma f(s) = f(s) + \lambda_0 \int_a^b \overline{Q}(s, t) f(t)\, dt , \tag{48}$$

wenn

$$\overline{Q}(s, t) = \Gamma(s, t) - K(s, t) - \lambda_0 \int_a^b K(s, r)\, \Gamma(r, t)\, dr \tag{49}$$

gesetzt wird. Der Gleichung (40) entspricht die Gleichung

$$\overline{Q}(s, t) = -K(s, t_1)\, \psi_1(t) - \ldots - K(s, t_m)\, \psi_m(t) , \tag{50}$$

so daß

$$\int_a^b \overline{Q}(s, t) f(t)\, dt = -\sum_{i=1}^{m} K(s, t_i) \int_a^b f(t)\, \psi_i(t)\, dt$$

wegen (43) verschwindet. Demnach ist

$$S\varphi(s) = f(s) , \tag{51}$$

d. h. die Funktion (47)

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda_0 \int_a^b \Gamma(s, t) f(t)\, dt$$

genügt der Gleichung (A_0).

Wir haben demnach den Satz:

Verschwindet für $\lambda = \lambda_0$ die Determinante $D(\lambda)$ nebst ihren Unterdeterminanten von geringerer als der $m$ten Ordnung*), ist aber $D(\lambda_0; s_1, \ldots, s_m; t_1, \ldots, t_m)$ von Null verschieden, so besitzt die homogene Integralgleichung

$$(\mathrm{B}_0) \qquad \varphi(s) - \lambda_0 \int_a^b K(s, t)\, \varphi(t)\, dt = 0$$

die m linear unabhängigen Lösungen

$$\varphi_i(s) = \frac{D(\lambda_0; s_1, \ldots, s_{i-1}, s, s_{i+1}, \ldots, s_m; t_1, \ldots, t_m)}{D(\lambda_0; s_1, \ldots, s_m; t_1, \ldots, t_m)}$$
$$(i = 1, \ldots, m),$$

durch welche sich jede Lösung in der Form

$$\varphi(s) = c_1 \varphi_1(s) + \ldots + c_m \varphi_m(s)$$

mit konstanten Koeffizienten $c_1, \ldots, c_m$ darstellen läßt.

Die nicht homogene Integralgleichung

$$(\mathrm{A}_0) \qquad \varphi(s) - \lambda_0 \int_a^b K(s, t)\, \varphi(t)\, dt = f(s)$$

ist dann und nur dann lösbar, wenn

$$(\alpha) \qquad \int_a^b f(s)\, \psi_i(s)\, ds = 0 \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

ist, wo $\psi_1(t), \ldots, \psi_m(t)$ die m linear unabhängigen Lösungen der Gleichung

$$(\mathrm{B}_0') \qquad \psi(t) - \lambda_0 \int_a^b \psi(s)\, K(s, t)\, ds = 0$$

sind. Sind die Bedingungen (α) erfüllt, so wird die allgemeinste Lösung der Integralgleichung (A_0) dargestellt durch

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda_0 \int_a^b \Gamma(s, t)\, f(t)\, dt + c_1 \varphi_1(s) + \ldots + c_m \varphi_m(s),$$

---

*) Die Unterdeterminante $m$ter Ordnung $D(\lambda; s_1, \ldots, s_m; t_1, \ldots, t_m)$ ist durch die Formeln (20), (21) und (22) definiert.

wo

$$\Gamma(s,t) = \frac{D(\lambda_0;\, s, s_1, \ldots, s_m;\, t, t_1, \ldots, t_m)}{D(\lambda_0;\, s_1, \ldots, s_m;\, t_1, \ldots, t_m)}$$

ist und $c_1, \ldots, c_m$ willkürliche Konstante sind *).

§ 38. Kerne, welche unendlich werden. Integralgleichungen für Funktionen zweier Veränderlichen.

Wenn, wie es häufig vorkommt, der Kern $K(s,t)$ für $s=t$ unendlich wird, verlieren die in § 34 entwickelten Formeln ihre Gültigkeit, weil $K(r_1, r_1), \ldots, K(r_n, r_n)$ unendlich groß sind. Wir nehmen an, der Kern $K(s,t)$ werde für $s=t$ von geringerer als der $\frac{1}{2}$ten Ordnung unendlich, d. h. es sei eine zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ gelegene Zahl α so vorhanden, daß

$$(s-t)^\alpha K(s,t)$$

für $s=t$ nicht mehr unendlich wird.

Wir ersetzen in den Formeln (2) und (3) für A_n und $A_n(s,t)$ die Größen $K(r_1, r_1), \ldots, K(r_n, r_n)$ durch Null, so daß wir haben:

$$A_n = \frac{1}{n!}\int_a^b \ldots \int_a^b \begin{vmatrix} 0, & K(r_1,r_2), & \ldots, & K(r_1,r_n) \\ K(r_2,r_1), & 0, & \ldots, & K(r_2,r_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ K(r_n,r_1), & K(r_n,r_2), & \ldots, & 0 \end{vmatrix} dr_1 \ldots dr_n \tag{52}$$

$$A_n(s,t) = \frac{1}{n!}\int_a^b \ldots \int_a^b \begin{vmatrix} K(s,t), & K(s,r_1), & \ldots, & K(s,r_n) \\ K(r_1,t), & 0, & \ldots, & K(r_1,r_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ K(r_n,t), & K(r_n,r_1), & \ldots, & 0 \end{vmatrix} dr_1 \ldots dr_n \tag{53}$$

Dann bleibt die Formel (4) bestehen. Wir definieren die Reihen $D(\lambda)$ und $D(\lambda;\, s,t)$ durch die Gleichungen (5) und (6), worin nur jetzt unter A_n und $A_n(s,t)$ die Ausdrücke (52) und (53) verstanden werden. Man kann be-

*) Weitergehende Untersuchungen bei Plemelj (Monatshefte für Mathematik und Physik 1904, S. 93), Heywood (Journ. de Mathém. 1908, S. 283), Goursat (Ann. de la Fac. de Toulouse 1908, S. 1).

weisen*), daß unter der oben über den Kern $K(s, t)$ gemachten Voraussetzung die Potenzreihe $D(\lambda)$ für alle Werte von λ konvergiert; dasselbe gilt — wenn man von der singulären Linie $s = t$ absieht — von $D(\lambda; s, t)$; die Differenz

$$D(\lambda; s, t) - K(s, t)\, D(\lambda)$$

ist für alle Werte von λ und für $a \leqq s \leqq b$, $a \leqq t \leqq b$ konvergent**). Die Relation (7) ist auch jetzt noch gültig. Die durch die Formel (8)

$$\mathsf{K}(\lambda; s, t) = \frac{D(\lambda; s, t)}{D(\lambda)}$$

definierte lösende Funktion $\mathsf{K}(\lambda; s, t)$ des Kernes $K(s, t)$ hat jetzt die singuläre Linie $s = t$***), aber die Differenz

$$\mathsf{K}(\lambda; s, t) - K(s, t)$$

wird, wenn $D(\lambda) \neq 0$ ist, für $s = t$ nicht mehr unendlich. Mit Hilfe der Relation (9), welche bestehen bleibt, beweist man wie früher, daß die Integralgleichung (A) die einzige Lösung (10) besitzt, wenn $D(\lambda)$ von Null verschieden ist.

Auch die in § 36 und § 37 aufgestellten Sätze über die Lösungen der homogenen Integralgleichung (B_0), wo λ_0 eine Nullstelle von $D(\lambda)$ ist, bleiben bestehen, wenn $K(s, t)$ für $s = t$ von geringerer als der $\frac{1}{2}$ten Ordnung unendlich wird; man hat nur in allen in § 36 benutzten Determinanten $K(r_1, r_1), \ldots, K(r_n, r_n)$ durch Null zu ersetzen.

---

*) Vgl. Hilbert, Göttinger Nachrichten 1904, S. 83.

**) Es ist

$$A_n(s, t) - K(s, t)\, A_n = A_n^*(s, t),$$

wo $A_n^*(s, t)$ aus dem Ausdruck (53) für $A_n(s, t)$ dadurch hervorgeht, daß man das erste Element $K(s, t)$ der Determinante durch Null ersetzt. Man beweist, daß die Reihe

$$D^*(\lambda; s, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A_n^*(s, t)\, \lambda^n$$
$$= D(\lambda; s, t) - K(s, t)\, D(\lambda)$$

für alle Werte von λ konvergiert, wie auch s und t im Intervall $a \ldots b$ angenommen werden.

***) Es ist

$$\mathsf{K}(\lambda; s, t) = K(s, t) + \frac{D^*(\lambda; s, t)}{D(\lambda)}.$$

Bisweilen ist es nützlich, eine Integralgleichung mit dem Kern $K(s, t)$ auf eine Integralgleichung mit dem iterierten Kern $K^2(s, t)$ zurückzuführen. Diese Zurückführung kann man vornehmen, wenn der als integrierbar vorausgesetzte Kern $K(s, t)$ im Integrationsgebiet unendlich wird, während $K^2(s, t)$ endlich bleibt. Sie ist insbesondere dann anzuwenden, wenn $K(s, t)$ unendlich wird, ohne die vorhin angenommene Bedingung zu erfüllen, während $K^2(s, t)$ dieser Bedingung genügt.

Ersetzt man im zweiten Glied der Integralgleichung (A)

$$\varphi(s) - \lambda\int_a^b K(s, r)\,\varphi(r)\,dr = f(s)$$

die Funktion $\varphi(r)$ durch

$$f(r) + \lambda\int_a^b K(r, t)\,\varphi(t)\,dt,$$

so erhält man, indem man die in § 35 eingeführte Bezeichnung

$$K^2(s, t) = \int_a^b K(s, r)\,K(r, t)\,dr \tag{54}$$

benutzt, die Integralgleichung

$$\left\{\begin{aligned} &\varphi(s) - \lambda^2\int_a^b K^2(s, t)\,\varphi(t)\,dt \\ &= f(s) + \lambda\int_a^b K(s, t)\,f(t)\,dt, \end{aligned}\right. \tag{55}$$

deren rechte Seite eine gegebene Funktion von s ist. Eine Lösung $\varphi(s)$ der Integralgleichung (A) mit dem Kern $K(s, t)$ stellt also auch eine Lösung der Integralgleichung (55) mit dem Kern $K^2(s, t)$ dar.

Ist λ^2 keine Nullstelle der Determinante des Kerns $K^2(s, t)$ (welcher endlich oder für $s = t$ von geringerer als $\frac{1}{2}$ter Ordnung unendlich ist), so daß die Integralgleichung (55) nur eine Lösung $\varphi(s)$ besitzt, so genügt $\varphi(s)$ auch der Integralgleichung (A).

Zum Beweise multiplizieren wir die Gleichung (55) mit $K(r, s)\,ds$ und integrieren nach s zwischen den Grenzen a und b. Wenn wir schließlich s statt r schreiben, haben wir die Gleichung

$$\int_a^b K(s, t) f(t)\,dt + \lambda \int_a^b K^2(s, t) f(t)\,dt$$
$$= \int_a^b K(s, t)\,\varphi(t)\,dt - \lambda^2 \int_a^b K^3(s, t)\,\varphi(t)\,dt\,.$$

Dieselbe Gleichung erhalten wir, wenn wir in (55) an Stelle von $\varphi(s)$ die Funktion

$$\psi(s) = f(s) + \lambda \int_a^b K(s, t)\,\varphi(t)\,dt$$

einsetzen. Daraus folgt, daß $\psi(s)$ der Gleichung (55) genügt. Da aber die Gleichung (55) nur eine Lösung besitzt, so muß $\psi(s)$ mit $\varphi(s)$ übereinstimmen, es muß also

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int_a^b K(s, t)\,\varphi(t)\,dt$$

sein, d. h. $\varphi(s)$ ist eine Lösung der Integralgleichung (A).

Es sei nun $\psi(s)$ eine Lösung der homogenen Integralgleichung

$$\psi(s) = \lambda \int_a^b K(s, t)\,\psi(t)\,dt \tag{56}$$

für einen gewissen Wert von λ. Aus der Gleichung (56) folgt, wenn man auf der rechten Seite

$$\psi(t) = \lambda \int_a^b K(t, r)\,\psi(r)\,dr$$

setzt, die Gleichung

$$\psi(s) = \lambda^2 \int_a^b K^2(s, t)\,\psi(t)\,dt\,. \tag{57}$$

Es sei umgekehrt $\chi(s)$ eine Lösung der homogenen Integralgleichung

$$\chi(s) = \mu \int_a^b K^2(s, t)\, \chi(t)\, dt \tag{58}$$

für einen gewissen Wert von μ. Wir definieren die Funktionen $\chi_1(s)$, $\chi_2(s)$ durch die Gleichungen

$$2\chi_1(s) = \chi(s) + \sqrt{\mu} \int_a^b K(s, t)\, \chi(t)\, dt\,, \tag{59}$$

$$2\chi_2(s) = \chi(s) - \sqrt{\mu} \int_a^b K(s, t)\, \chi(t)\, dt\,, \tag{60}$$

so daß

$$\chi(s) = \chi_1(s) + \chi_2(s) \tag{61}$$

ist. Wenn man die Gleichung (59) mit $\sqrt{\mu}\, K(r, s)\, ds$ multipliziert, zwischen den Grenzen a und b integriert und schließlich r durch s ersetzt, erhält man die Gleichung

$$2\sqrt{\mu} \int_a^b K(s, t)\, \chi_1(t)\, dt = \sqrt{\mu} \int_a^b K(s, t)\, \chi(t)\, dt + \mu \int_a^b K^2(s, t)\, \chi(t)\, dt\,,$$

deren letztes Glied nach (58) gleich $\chi(s)$ ist; die rechte Seite dieser Gleichung stimmt mit der rechten Seite von (59) überein, ist also gleich $2\chi_1(s)$. Man hat demnach

$$\chi_1(s) = \sqrt{\mu} \int_a^b K(s, t)\, \chi_1(t)\, dt \tag{62}$$

und entsprechend

$$\chi_2(s) = -\sqrt{\mu} \int_a^b K(s, t)\, \chi_2(t)\, dt\,. \tag{63}$$

Wegen (61) können $\chi_1(s)$ und $\chi_2(s)$ nicht beide identisch verschwinden. Sind sie beide von Null verschieden, so ist auch

$$\chi_1(s) = \mu\int_a^b K^2(s\,,\,t)\,\chi_1(t)\,dt\,,$$

$$\chi_2(s) = \mu\int_a^b K^2(s\,,\,t)\,\chi_2(t)\,dt\,,$$

d. h. χ_1 und χ_2 genügen derselben homogenen Integralgleichung (58) wie χ, und man kann neben den Funktionen χ_1 und χ_2 die lineare Verbindung $\chi = \chi_1 + \chi_2$ weglassen. Wenn eine der Funktionen χ_1 und χ_2 identisch verschwindet, so stimmt die andere mit χ überein; die Funktion χ erfüllt also entweder die Gleichung (62) oder die Gleichung (63).

Bisher handelte es sich darum, durch Auflösung einer Integralgleichung aus einer gegebenen Funktion $f(s)$ einer einzigen Veränderlichen eine ebenfalls von einer Veränderlichen abhängende Funktion $\varphi(s)$ zu bestimmen. Auf Integralgleichungen, in welchen die gegebene und die gesuchte Funktion von zwei (oder mehr) Veränderlichen abhängen, läßt sich die bisherige Theorie fast unverändert übertragen.

Es liege eine Integralgleichung

$$\varphi(s) - \lambda\int K(s\,,\,t)\,\varphi(t)\,dt = f(s)$$

vor, in welcher s und t Punkte eines gewissen ebenen Flächenstückes J, ds und dt ebene Flächenelemente darstellen und die Integration über alle Elemente dt der Fläche J erstreckt wird; $f(s)$ und $\varphi(s)$ sind Funktionen eines Punktes s der Ebene, also Funktionen der beiden Koordinaten dieses Punktes oder Funktionen zweier Veränderlichen; der Kern $K(s\,,\,t)$ hängt von den beiden Punkten s, t der Ebene oder von zwei Paaren von Veränderlichen ab. Hat der Punkt s die Koordinaten x, y, der Punkt t die Koordinaten ξ, η und werden als Flächenelemente ds, dt die Rechtecke $dx\,dy$ bzw. $d\xi\,d\eta$ gewählt, so erhält die Integralgleichung die Form

$$\varphi(x\,,\,y) - \lambda\iint_J K(x\,,\,y\,;\;\xi\,,\,\eta)\,d\xi\,d\eta = f(x\,,\,y)\,.$$

Wenn wir jedoch die anfangs eingeführte Bezeichnung beibehalten, so erkennen wir ohne weiteres, daß die in

§§ 34—37 abgeleiteten Formeln auch jetzt gültig bleiben, wenn man nur in allen auftretenden Integralen das Integrationsintervall $a \ldots b$ durch das Integrationsgebiet J ersetzt.

Der Kern $K(s, t)$ oder $K(x, y; \xi, \eta)$ hänge von zwei Paaren von Veränderlichen ab, er werde aber für $s = t$ oder $x = \xi$, $y = \eta$ von geringerer als der ersten Ordnung unendlich groß, d. h. es sei eine zwischen 0 und 1 gelegene Zahl α so vorhanden, daß

$$\left(\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}\right)^\alpha \cdot K(x, y; \xi, \eta)$$

für $x = \xi$, $y = \eta$ nicht mehr unendlich wird. Dann bleiben die früheren Sätze über die Auflösung der Integralgleichungen bestehen, wenn nur A_n und $A_n(s, t)$ durch die Formeln (52) und (53) definiert werden*).

§ 39. Die Eigenfunktionen eines symmetrischen Kerns.

Es sei nun $K(s, t)$ ein (ausdrücklich als reell vorausgesetzter) symmetrischer Kern, d. h. es sei

$$K(s, t) = K(t, s).$$

Dann sind auch die in § 35 eingeführten iterierten Kerne $K^n(s, t)$ symmetrisch, wie aus den für $K^2(s, t)$, $K^3(s, t)$, ... aufgestellten Formeln folgt. Ferner verschwindet keiner von ihnen identisch; denn wäre $K^n(s, t)$ der erste identisch verschwindende Kern, so würde auch $K^{n+1}(s, t)$ identisch verschwinden; wird diejenige der beiden Zahlen n und $n+1$, welche gerade ist, mit $2m$ bezeichnet, so hätte man

$$K^{2m}(s, s) = \int_a^b K^m(s, r) K^m(r, s)\, dr$$

oder, da wegen der Symmetrie der iterierten Kerne

$$K^m(r, s) = K^m(s, r)$$

ist,

$$K^{2m}(s, s) = \int_a^b [K^m(r, s)]^2\, dr.$$

Aus dem identischen Verschwinden von $K^{2m}(s, s)$ folgt auch dasjenige von $K^m(r, s)$; dies widerspricht der An-

*) Vgl. auch Mason (Journ. de Math. 1904, S. 447).

nahme, $K^n(r, s)$ sei der *erste* Kern, welcher identisch verschwindet.

Wir beweisen den Satz von Schmidt:

Die Determinante $D(\lambda)$ eines symmetrischen Kerns besitzt mindestens eine Nullstelle.

Nach (17) ist

$$D'(\lambda) = -\int_a^b D(\lambda; r, r)\, dr,$$

also

$$\frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)} = -\int_a^b \frac{D(\lambda; r, r)}{D(\lambda)}\, dr;$$

nach (8) und (18) ist aber

$$\mathsf{K}(\lambda; r, r) = \frac{D(\lambda; r, r)}{D(\lambda)} = \sum_{n=0}^{\infty} K^{n+1}(r, r)\, \lambda^n$$

in eine Potenzreihe von λ entwickelbar, welche in einer gewissen Umgebung von $\lambda = 0$ konvergiert. Setzt man

$$U_n = \int_a^b K^n(r, r)\, dr, \tag{64}$$

so ist

$$\frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)} = -\sum_{n=0}^{\infty} U_{n+1}\, \lambda^n. \tag{65}$$

Wir weisen nach, daß die Potenzreihe von λ

$$\sum_{n=0}^{\infty} U_{n+1}\, \lambda^n \tag{66}$$

einen endlichen Konvergenzradius besitzt. Auf der Peripherie des Konvergenzkreises muß eine singuläre Stelle der Funktion (65) oder eine Nullstelle der ganzen transzendenten Funktion $D(\lambda)$ liegen.

Sind x und y zwei beliebige reelle Größen, so ist

$$\begin{aligned} &[x K^m(r, r') + y K^n(r, r')]^2 \\ &= x^2 K^m(r, r')\, K^m(r, r') + 2xy\, K^m(r, r')\, K^n(r, r') \\ &\quad + y^2 K^n(r, r')\, K^n(r, r') \geqq 0, \end{aligned}$$